

REAL ACADEMIA DE DOCTORES DE ESPAÑA

REVISIÓN DE ALGUNOS
ASPECTOS METODOLÓGICOS
EN LA ECONOMÍA

DISCURSO

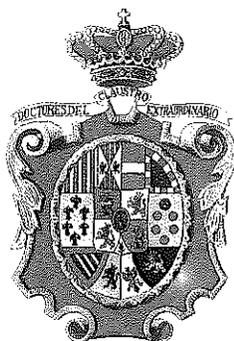
PRONUNCIADO POR EL

EXCMO. SR. DR. DON EMILIO COSTA REPARAZ

EN LA TOMA DE POSESIÓN COMO ACADÉMICO DE NÚMERO
EL DÍA 9 DE DICIEMBRE DE 2009

Y CONTESTACIÓN DEL ACADÉMICO

EXCMO. SR. DR. D. MANUEL LÓPEZ CACHERO



MADRID
MMIX

Depósito legal: M. 47:765-2009
Imprime: REALIGRAF, S. A.
C/ Pedro Tezano, 26
28039 Madrid

SINOPSIS

PREFACIO.

INTRODUCCIÓN.

EL TIEMPO:

- I. Concepciones.
- II. Tratamiento.
- III. Tiempo y economía.

EL EQUILIBRIO:

- I. Equilibrio y desequilibrio: implicaciones económicas.

EL CERO Y EL INFINITO:

- I. El cero, la nada y el vacío.
- II. El infinito.
- III. Infinito y economía.

CONTINUIDAD:

- I. Aspectos matemáticos.
- II. Aspectos económicos.

NANOLOGÍA:

- I. Nanología, continuidad, postulado de fina divisibilidad y marginalismo.

BIBLIOGRAFÍA.

DISCURSO DE CONTESTACIÓN.

**DISCURSO
DEL
EXCELENTÍSMO SEÑOR DOCTOR
DON EMILIO COSTA REPARAZ**

Excelentísimo Señor Presidente

Excelentísimos e Ilustrísimos Señoras y Señores Académicos

Señoras y señores:

PREFACIO

Quiero comenzar mi intervención con un cariñoso recuerdo y agradecimiento a las personas que me han ayudado y apoyado. Sin ellos no estaríamos celebrando este Acto.

Unos ya no están entre nosotros como es el caso de los Doctores don Ángel Vegas Pérez y don Lorenzo Gil Peláez.

Por otra parte, quiero explicitar mi reconocimiento a los Profesores Doctores don Marcial Jesús López Moreno, que presidió el Tribunal de mi Tesis doctoral y el de acceso a la Cátedra de la Universidad de Oviedo, y a don Eugenio Prieto Pérez, también me propuso para formar parte de esta digna Institución.

Capítulo especial merece el Profesor López Cachero, no sé si amigo y maestro o maestro y amigo. Desde que yo estudiaba tercer curso de la licenciatura hemos estado, como diría Unamuno, viviéndonos intelectual y profesionalmente, durante todos estos años. A él le debo gran parte de mi formación y trayectoria tanto personal e intelectual como profesional.

INTRODUCCIÓN

Por deformación profesional, nuestra actividad universitaria se ha dirigido fundamentalmente a estimular, creando

problemas a estudiantes y a profesores y en la medida de lo posible, resolviéndolos.

Sé que este marco no es el apropiado para presentar o estimular problemas. En esta Casa no debo, ni puedo, ni quiero seguir con mi línea de actuación y comportamiento de tantos años de actividad profesional; pero precisamente por ello, no creo poder evitarlo. Debo pedir perdón por la petulancia.

En este discurso vamos a considerar algunos de los problemas metodológicos que se han obviado en el estudio del Análisis Económico.

En la Ciencia, a veces en general y en la Económica en particular, se ha prescindido de analizar ciertos supuestos en los que era necesario apoyarse para poder profundizar y continuar el trabajo. En otras ciencias se han admitido principios de otros campos, tratando de servirse de ellos, sin investigar la bondad o falsedad de las hipótesis en su aplicación. Lo mismo ha ocurrido en la ciencia de la Economía.

En esta exposición vamos a discutir algunos conceptos que pueden originar problemas al aplicarlos a nuestro campo de estudio: la Economía. Los aspectos que vamos a comentar son: el tiempo, el equilibrio, el cero y el infinito, la continuidad y, por último, la nanología.

EL TIEMPO

En la ciencia de la Economía son frecuentes las apelaciones al tiempo, de una manera paramétrica, en la que se considera constante. No obstante, se supone que varía o, por lo menos, que transcurre. No se sabe cómo ni de qué manera, pero varía. Así se dice, se supone, que las condiciones de equilibrio cambian, que se produce una variación de la oferta o que se origina un cambio en los gustos del sujeto. Es claro que estas oscilaciones, vaivenes o cambios se producen en el tiempo. Para que haya adaptaciones, novedades o simplemente innovaciones, es preciso que exista el tiempo pero no como una constante, ni siquiera como un parámetro, sino como variable, pues tanto las variables económico-sociales, como las temporales van a depender unas de las otras.

Quizá sea la Matemática de las Operaciones Financieras, la rama del conocimiento económico que ha dado una interpretación más peculiar al tiempo, al considerarlo como un bien económico pero negativo, en el sentido litero-matemático del término, ya que a medida que transcurre, salvo en periodos deflacionistas, el valor del capital financiero disminuye.

El devenir, el transcurrir del tiempo, nos debe conducir a una situación, teórica y tradicionalmente buena: el equilibrio.

El tiempo, como decía San Agustín, es algo que todos sabemos lo que es, hasta que nos preguntan y exigen una respuesta o definición.

Para esquematizar podemos señalar que siempre ha habido diferentes posturas y posiciones frente al tiempo: desde ignorarlo clara y explícitamente, a considerarlo como una variable fundamental en cualquier análisis o en cualquier modelo, pasando por alguna ocultación vergonzante de ignorar su existencia pero actuar en sentido contrario, esto es, afirmar: «el tiempo no existe, pero si se produce una variación...»

En el campo filosófico nos encontramos con que las diferentes posturas sobre el tiempo se pueden resumir mediante unas frases que recogen las ideas principales de los autores y seguidores de cada escuela. Sin ánimo de ser exhaustivos señalamos algunas:

La corriente idealista representada por Kant considera el tiempo como una forma *a priori* de nuestra intuición sensible. Para los escolásticos, el tiempo es un ente de razón con fundamento en la realidad. Los realistas (Newton) consideran que el tiempo es sidereal y que fluye por su propia naturaleza. San Agustín pone el acento en la duración: «el tiempo es la huella del pasado». Bergson recupera esta idea, aunque con matices, al distinguir entre el tiempo cosmológico y el psicológico. De esta distinción surgen las ideas de causa y causalidad. Los existencialistas distinguen la causalidad psicológica y vital de la causalidad ética e histórica. Para Heidegger: «la existencia es la concreción del tiempo»¹.

¹ Costa Reparaz, E. y otros (2000): *Actas del congreso*, pág. 67.

Desde la perspectiva de la física, nos encontramos con varias posturas: la clásica, donde se unen el tiempo al movimiento y al espacio, hasta la concepción gödeliana en que niega el tiempo. Recuérdese lo que dice B. Russell: «El movimiento es la ocupación por una entidad de una serie continua de lugares en una serie continua de tiempo. El cambio involucra siempre, por una parte, una entidad fija; y por otra, una relación triple entre esta entidad, otra entidad y alguno, pero no todos, los momentos de tiempo»².

La teoría de la Relatividad y la física cuántica también han aportado sus matices a la concepción del tiempo.

No deja de ser curioso cómo ha ido evolucionando la grafía de las palabras espacio y tiempo. Primero se escribieron como dos palabras independientes y separadas. Luego se unieron con un guión, «espacio-tiempo» y ahora es frecuente ver «espaciotiempo» como una sola palabra, lo que crea problemas, no sólo conceptuales, sino ortográficos.

Permítaseme resumir unas líneas del Congreso de Profesores de Matemáticas para la Economía celebrado en Sevilla, en el año 2000:

Si consideramos el tiempo desde una posición antropológica, nos encontramos con posiciones parecidas: la lineal, en la que la secuencia pasado, presente, futuro se manifiesta con toda nitidez, pudiendo distinguirse cada uno de los estadios de la evolución temporal. A esta corriente de pensamiento pertenecen las culturas semíticas y occidentales, así como las religiones, fundamentalmente el cristianismo y el islamismo. Para estas la evolución se produce en una única dirección: el Paraíso.

La corriente circular considera que la evolución temporal no se produce hacia el futuro, sino que el pasado se renueva en el futuro, esto es, «no hay nada nuevo bajo el sol». En el Eclesiastés, 1: 5-6, 9, se puede leer: «Sale el sol, y se pone el sol, y se apresura a volver al lugar de donde se levanta. El viento tira hacia el sur y rodea al norte; va girando de continuo, y a sus giros vuelve el viento de nuevo»; en el versículo 9: «¿Qué es lo

² Russell, B. (1967); págs. 530-531.

que fue?, lo mismo que será. ¿Qué es lo que ha sido hecho? Lo mismo que se hará; y nada hay nuevo debajo del sol». Se trata de una idea profundamente pesimista, un argumento que justifica la necesidad de que el hombre regrese a la Edad de Oro perdida. En esta corriente destacan, entre otros: Hesíodo, quien bautizó las edades del hombre como Edad de Oro, Plata, Bronce, Héroe, Hierro, también nuestro Jorge Manrique, para quien «cualquier tiempo pasado fue mejor».

Hay concepciones que niegan la existencia del tiempo, lo sustituyen por la idea de «momento de...» o «duración de...». La idea final es que el tiempo es sólo materia prima o soporte de la actividad, una sucesión de acontecimientos, pasados o por venir. Así el tiempo carece de valor en sí mismo, no es posible perder el tiempo, ya que el tiempo no transcurre si no hay actividad. Tampoco se concibe la idea de futuro medio o lejano. En consecuencia, no se consideran conceptos tales como productividad, inversión o planificación.

Merece especial interés la concepción lineal del tiempo y que prestemos especial atención a la llamada flecha del tiempo.

Simbólicamente se suele utilizar la flecha para indicar el movimiento, el flujo del devenir humano, de ahí la aceptación y adopción de este símbolo, que aunque claro nos lleva a dificultades, ya que en principio el tiempo no fluye, sino que es.

Cuando hablamos del pasado, presente y futuro nos estamos refiriendo a una imagen que nos sirve de referencia para tratar de entender y situar los acontecimientos. Como Einstein decía en sus peripatéticas conversaciones con Gödel: «pasado, presente y futuro son sólo ilusiones, aunque sean ilusiones pertinaces»³.

Con relación al presente debemos señalar algunos problemas. El primero es su existencia, pues en el momento que tratemos de aprehenderlo ya se ha transformado en pasado. Los griegos, como Zenón, ya señalaron esta dificultad aunque no se referían al tiempo. Recordemos la tantas veces citada paradoja de Aquiles y la tortuga.

³ Daveis, P. (2008): «La flecha del tiempo», *Temas*, núm. 51, pág. 5.

Otro problema del presente es la simultaneidad. ¿Cuándo dos sucesos son simultáneos? La observación no es un buen criterio para determinarlo, pues pueden producirse dos sucesos en el mismo instante y —suponiendo que los podamos determinar— sin embargo observarlos en momentos diferentes. Los análisis astronómicos son un buen ejemplo de esta afirmación.

Intelectualmente podemos admitir que dos sucesos se produzcan en el mismo momento en Marte y en la Tierra, o en Europa y en Oceanía, pero ¿cómo saberlo? La observación no nos sirve y los relojes, tampoco. En estas circunstancias tiene sentido la afirmación de que el pasado es la concreción del presente.

Las críticas a la existencia del futuro son evidentes y no necesitan matizaciones. Aunque un suceso sea actual en Marte, será futuro en la Tierra y presente una vez transcurridos veinte minutos terráqueos desde su acaecimiento, y recíprocamente.

Si consideramos el tiempo como un flujo, necesitamos la idea de movimiento, de cambio que se da en el tiempo, pero ese movimiento, del tiempo, debe estar vinculado, relacionado con algo, debe tener un punto de referencia. ¿El flujo temporal será un movimiento del tiempo con relación a él mismo?

Sin embargo la idea de pasado y futuro están claras, tanto desde el punto de vista de la física como de la perspectiva filosófica. Las leyes de la termodinámica justifican el pasado y el futuro, pero al destacar la idea de la flecha temporal como sostiene la segunda ley de la termodinámica, recoge una característica del tiempo lineal, como es la asimetría en el tiempo, no en el flujo del tiempo y nos indica la dirección en el devenir de los acontecimientos. Pero el pasado o el futuro son estados carentes de sentido en si mismos.

En esta línea, la asimetría del tiempo podría afirmarse, con Prigogine, que los procesos irreversibles convierten el flujo temporal en un aspecto objetivo.

Sin embargo, la memoria es un proceso unidireccional que incorpora información, aumentando la entropía del cerebro. Por otra parte, con la Física cuántica se matiza el principio de

Heisenberg, en el sentido de que el futuro está abierto a los muchos futuros y el tiempo pasa al variar la energía.

Aunque más adelante volveremos nuevamente a esta forma de concebir el tiempo, permítaseme unas breves notas sobre el tema, referido fundamentalmente a la Economía.

En numerosos modelos del Análisis Económico se presentan funciones temporales que supuestamente muestran la evolución de una variable a lo largo del tiempo. Supongamos una función de consumo tal que $C_t = F(Y_{t-1})$ siendo C_t e Y_t las variables que representan el consumo y la renta en el momento t , respectivamente.

Este modelo, así planteado, nos indica la relación entre el consumo y la renta en dos momentos consecutivos, pero para la interpretación del modelo da lo mismo que lo apliquemos al siglo I, en nuestro Siglo de Oro o en el siglo XX, siempre tendremos la misma relación con independencia de la fecha del calendario.

Según esta concepción, como corresponde a sus principios, la historia o el comportamiento se repite cíclicamente, pues siempre tendremos

$$C_{99} = F(Y_{98}) \text{ ó } C_{1654} = F(Y_{1653}) \text{ ó } C_{1948} = F(Y_{1947})$$

(Podrán variar las constantes que se consideren, pero siempre encontraremos unos valores de coincidencia. En este modelo, lo que evidentemente no varía es el sustrato ideológico que lo mantiene e inspira).

Una tercera postura frente al tiempo es negar su existencia. Esta posición ha sido mantenida desde dos perspectivas diferentes. Una antropológica, defendida por ciertas tribus de América Central y África Central. En ellas el tiempo no existe, la existencia temporal se limita a la duración y al momento. Es frecuente oír a ciertos misioneros que hablan de que en esas tierras están en época de lluvias o del monzón. La duración o el tiempo se limitan a la memoria.

La otra postura que niega el tiempo la podríamos defender desde una perspectiva más científica que antropológica, como

la anterior. Nos referimos a la polémica entre Gödel y Einstein sobre la existencia del tiempo.

Siguiendo a Palle Yourgrau⁴, podemos decir que Gödel era una combinación entre Einstein y Kafka, uniendo el racionalismo del primero a la imaginación del segundo, planteando así situaciones, para algunos, fuera de la realidad o quizá solamente, en nuestro aquí y ahora, arréales.

En efecto, Gödel, suponiendo que en la estructura espacio-tiempo se pudiese formar un bucle cerrado, un desplazamiento hacia el futuro, podía terminar en el pasado, caminando a través de unas trayectorias singulares por las que se desplazarían los objetos a través del espacio-tiempo. Este autor, siguiendo las ecuaciones de la relatividad de su compañero de paseos por Blue Hill, demostró que era posible un viaje a través del tiempo, que se permitiría retornar al pasado. En sus investigaciones llegó a calcular la velocidad con que un móvil se debía desplazar, la carga que tenía que transportar para hacer un viaje «marcha atrás» en el tiempo.

Si esto es posible, poder volver al pasado, es porque nunca había ocurrido, ya que el tiempo deja de transcurrir, en definitiva no tenemos tiempo. Lo que plantea un dilema en el que varios autores incidieron. Si la teoría de la relatividad es cierta, el tiempo es ideal.

Admítasenos una larga cita de Prigogine⁵:

«Einstein recibió, en las postrimerías de su vida, una colección de ensayos, que incluía una contribución del gran matemático Gödel. Éste creía poder probar la equivalencia entre pasado y futuro imaginando la posibilidad de un viaje al pasado. En su respuesta a Gödel, Einstein rechazó la idea: fuese cual fuese la tentación de la eternidad, aceptar la posibilidad de retornar al pasado equivalía a una negación de la realidad del mundo. Como físico, Einstein no podía aceptar esta consecuencia —sin embargo lógica— de sus propias ideas.

En «Una nueva refutación del tiempo», el gran escritor Jorge Luis Borges expresa una ambivalencia análoga. Concluye,

⁴ Yourgrau, P. (2000): pág. 20.

⁵ Prigogine, I. (1979): pág. 216.

después de exponer las doctrinas que transforman el tiempo en una ilusión: «And yet, and yet... Negar la sucesión temporal, negar el yo, negar el universo astronómico son desesperaciones aparentes y consuelos secretos (...) El tiempo es un río que me arrebató, pero yo soy el río; es un tigre que me destroza, pero yo soy el tigre; es un fuego que me consume, pero yo soy el fuego. El mundo, desgraciadamente, es real; yo, desgraciadamente, soy Borges». El tiempo y la realidad están irreductiblemente vinculados. Negar el tiempo puede parecer un consuelo o semejar un triunfo de la razón humana, pero es siempre una negación de la realidad.

La negación del tiempo fue una tentación para Einstein el físico, al igual que para Borges el poeta.

Sin profundizar en ambas posturas, pues ni nos corresponde ni es la ocasión, simplemente señalaremos, siguiendo a George Musser⁶: «Si el continuo es un ente por derecho propio (como sostiene el sustantivismo), la relatividad general ha de ser indeterminista (es decir, su descripción del mundo deberá contener un elemento de aleatoriedad). Y si la teoría es determinista, el espaciotiempo deberá ser pura ficción (como sostiene el relacionismo)».

Es posible que la dicotomía gödeliana entre el tiempo de la vida cotidiana y el científico y formal, el de la ciencia se pueda resolver admitiendo las series de McTaggart.

En efecto, este autor considera dos series temporales. Una, la B, que se distingue por ser el soporte de la actividad, recoge las fechas, es lo que podríamos señalar como el tiempo del calendario. El tiempo en su sentido dinámico, de flujo, de «algo» que transcurre, está recogido en lo que llama serie A. Esta serie se caracteriza por varias implicaciones como: a) el tiempo es portador de incertidumbre. b) el tiempo es de cuantificación objetiva. c) el tiempo no es ontológicamente neutral. Existir aquí y ahora no es diferente según la ubicación geográfica. En esta serie, la simultaneidad es absoluta, aunque Einstein la niegue, ya que supone que no hay un ahora universal y objetivo. d) La sucesión pasado, presente y futuro en esta serie están claramente determinados, en el sentido de que el pasado es la concreción del presente, por tanto inamovible,

⁶ Musser, G. (2008): pág. 10.

mientras que el presente se podrá concretar en diversos futuros, está abierto.

En muchos modelos económicos, llamados dinámicos, el tiempo aparece como simple referencia temporal, como soporte de la actividad económica, lo que en terminología de McTaggart correspondería a la serie B. Hicks dice que un sistema es dinámico si está fechado, Tinbergen considera un sistema dinámico cuando tiene ecuaciones referidas a distintos momentos. De manera parecida opina Frisch.

Samuelson, en sus Fundamentos, parece que se acerca más a la serie A pues, para que un sistema sea dinámico exige la existencia de derivadas con significado económico y que el modelo tenga variables que se puedan interpretar en términos económicos, unidas o referidas a un momento y unas circunstancias determinadas.

Obsérvese que hace referencia a las derivadas y a las variables con sentido económico. Aunque no especifica qué sentido económico y la interpretación que deben tener esas derivadas. Pero con respecto a qué. ¿Al tiempo?

Se ha discutido mucho si el tiempo, caso de existir, se puede representar como una variable continua o discreta.

Históricamente se consideró al tiempo, como un flujo continuo lo que ha permitido modelizarlo mediante ecuaciones diferenciales. Esta concepción estaba en consonancia con las ideas temporales tanto físicas como filosóficas.

Aunque las ecuaciones en diferencias finitas son antiguas (Laplace las estudió en diferencias parciales), la aplicación al tiempo y a la Economía es relativamente moderna.

En el siglo XX se empezó a vislumbrar la posibilidad de que el comportamiento del tiempo se pudiese representar mediante una variable discreta, no sólo por su tratamiento y medición sino por la utilización en otras ciencias, especialmente en las sociales, pues se consideró que la referencia a la realidad, a los datos, era siempre discreta.

Verdaderamente, las fuentes estadísticas están referidas a una fecha y se publican por periodos, más o menos amplios, pero tienen carácter discreto.

Lo mismo ocurre en el mundo de la Física, el tiempo es un tiempo de «reloj», con una medida aproximada, ya que la medida debe ser, y es, discreta, no podemos medir la continuidad, una sucesión, aunque la concreción de esas medidas sea finita. En efecto, hablamos de la renta en un período, del índice de precios o de la situación de tesorería de una empresa en un momento dado, discreto, fijo, determinado, nunca como un flujo, lo que nos lleva a suponer y admitir como cierto que en Economía, el tiempo es esencialmente discreto, pero se está pensando en el resultado o cuantificación más que en el devenir temporal.

Las magnitudes económicas y de otras muchas ramas del conocimiento son discretas, es decir, corresponden a un momento fijo, estático.

En las últimas investigaciones físicas sobre el tiempo están apareciendo teorías que parecen desbordar las concepciones clásicas.

De la teoría de las cuerdas o de la teoría de la «gravidad de bucles»⁷, parece desprenderse la existencia de un espacio-tiempo discreto compuesto de «algo» parecido a los átomos de los materiales o de la materia microfísica.

De ser ciertas estas teorías, tendríamos que abandonar las ecuaciones diferenciales y profundizar en el estudio de las ecuaciones funcionales de carácter discreto, como las ecuaciones en diferencias finitas.

La elección del tiempo que escojamos es importante, no sólo por las hipótesis subyacentes, sino por el tratamiento que admite y, especialmente, por la información que nos proporciona. Piénsese en un modelo simple, como el de Samuelson, con un acelerador de tipo ingenuo. Según elijamos una hipótesis u otra, tendremos una diferencia de evolución de la renta a lo largo del tiempo de tres tipos de trayectorias temporales, monótonas en el caso de continuidad. Con la concepción discreta del tiempo deberemos reseñar la relación entre los valores de la propensión marginal al consumo y el acelerador de inversiones.

⁷ Bojowald, M. (2008): pág. 15.

EQUILIBRIO

Las doctrinas económicas nos enseñan que, salvo raras excepciones, han expuesto un claro camino hacia una situación, adaptada de la Física, que es el equilibrio.

Las escuelas tanto Ortodoxa, Clásica y Neoclásica, como Heterodoxa, de las teorías económicas han ponderado el equilibrio como algo positivo, deseable, en definitiva bueno, que se debía considerar como un objetivo a conseguir.

Sólo la Escuela Austriaca planteó el problema del desequilibrio como motor del crecimiento económico. Si exceptuamos este grupo de economistas, los demás no responden (¿ni se plantean?) a la pregunta: «una vez alcanzada esa situación, ¿cómo evolucionará la actividad económica? ¿Se parará?»

Parece lógico que nos preguntemos sobre la evolución, en el tiempo, de la actividad económica y los problemas y juicios de valor que implica el admitir como bueno el equilibrio. En definitiva, ¿existe o tiene sentido hablar de la economía del desequilibrio?

Por equilibrio podemos entender una situación en la que se compensan todas y cada una de las fuerzas que inciden en ese estado.

Esta definición es más intuitiva que rigurosa pues, en cada instante, las fuerzas se compensan, ya que de otro modo no estaríamos en esa posición. La composición de fuerzas la debemos entender en el sentido más amplio posible, desde una caja que tenga un resorte, y que su tapa impida a este saltar, hasta una amenaza que impida cualquier estado de conciencia, de pensamiento, o de conducta libres.

Un ejemplo, típico en economía, fue la inflación reprimida, situación en la que la tendencia alcista de los precios estaba controlada por decreto u otra figura legal, de manera que se fijaba la variación de los precios al margen de la evolución de las fuerzas económicas.

En el campo del Análisis Económico nos encontramos con dos posturas contrarias —no contradictorias— que pueden ejemplarizarse con las posiciones defendidas por Pareto y

Samuelson, respectivamente. En efecto, Pareto opina que un punto de equilibrio es óptimo cuando cualquier modificación o perturbación perjudica por lo menos uno de los agentes participantes en esa situación. Si hablamos de un mercado, el óptimo paretiano será aquella posición en la que toda variación empeora la posición de algún, o algunos, concurrentes. El equilibrio, para Samuelson es aquella posición en la que los intereses de los agentes económicos están compensados. No es necesario, como en el equilibrio paretiano, que la posición sea la mejor posible.

Es claro que la postura de Samuelson es más laxa y flexible que la definición de Pareto.

Sin ánimo de ser exhaustivo, los diferentes economistas que han hablado o escrito sobre este tema han resaltado la misma opinión, con más o menos subterfugios, critican la idea de compensación de fuerzas. Desde Kaldor a Chiang, refiriéndose a Machlup, pasando por Robinson, con relación a Walras, se refieren al equilibrio como una compensación de distintos elementos que se ajustan al cambio.

Zeuthen⁸ indica que «cuanto más nos acerquemos al equilibrio total, mayor será la necesidad de un análisis dinámico, introduciendo velocidad y movimiento general, que es más extenso».

En todas las definiciones parece encontrarse un contrasentido, pues hablan de un mundo estático —sin tiempo— pero utilizan términos esencialmente dinámicos: movimiento, variación, cambio...

Recordemos que en el sentido físico la fuerza es la masa por la aceleración y ésta es la segunda derivada del espacio respecto al tiempo, lo que implica un cambio en el tiempo. Aunque esta expresión no podemos utilizarla en las ciencias no físicas, como la Economía, sí podemos imaginarnos la idea de fuerza aplicada a un grupo social en el que la velocidad sería la rapidez con que una opinión se va expandiendo con el tiempo. Si consideramos que la opinión que se extiende va ganando adeptos con y en el tiempo, podríamos tener la idea de la acelera-

⁸ Zeuthen (1960): pág. 169.

ción, que, volvemos a insistir, es un concepto dinámico. La masa del mundo físico la podemos interpretar como la idea que se propaga con y en el tiempo.

El equilibrio en sí no es ni bueno ni malo, simplemente es. Puede ser perverso. Pensemos en la situación económica de algunos países, fundamentalmente del tercer mundo, donde algunas empresas o familias tienen pingües beneficios y el nivel de bienestar social es paupérrimo. Como por ejemplo, una situación en la que hubiese beneficio empresarial con paro.

Si no transcurre el tiempo, si no hay posibilidad de movimiento, de cambio, de evolución, no se puede hablar de equilibrio y mucho menos hablar de su bondad o maldad. Si no transcurre el tiempo no hay equilibrio: estamos en una situación en la que las fuerzas se contrarrestan unas a otras, pues en caso contrario, si prevaleciese una, la situación no sería la que es.

Si nos introducimos en el mundo de la dinámica, tenemos problemas análogos, por una parte, la definición y por otra, la manipulación. Para incorporarnos al mundo dinámico no es suficiente trabajar con una variable nueva que llamemos tiempo.

El tiempo en los modelos dinámicos es «algo» más que una variable, sea esta continua, discreta o tenga un comportamiento mixto.

La variable temporal como tal y en cualquiera de sus posibles concepciones, que admitan su existencia, implica: a) un momento —*ex post* o *ex ante*—; b) unas expectativas, y c) la estabilidad. Estos temas ya han sido tratados en otros trabajos reseñados en la bibliografía.

Señalemos, brevemente, que tanto el concepto matemático como el físico o económico de estabilidad implica un horizonte temporal suficientemente amplio. Sin mencionar la estabilidad asintótica, en que, por definición, debe admitirse que el comportamiento se mantiene en un periodo infinitamente largo.

Este horizonte, extenso a lo largo de la historia de la Economía, se puede —podría— admitir sin demasiadas complica-

ciones. Estos movimientos, hoy no tienen por qué ser revolucionarios, sin embargo un periodo de diez años es suficientemente largo como para que no podamos admitir determinados postulados, supuestos o hipótesis que, bajo ciertas condiciones como, por ejemplo, la linealidad de algunas funciones o la constancia de determinados valores y parámetros, se suelen aceptar.

En los estudios de la Historia Económica, hasta, pongamos principios del siglo XX, se podían admitir las ondas de los ciclos largos, entre cuarenta y ocho y sesenta años, de Kondrátiév. Hoy su aceptación es discutible y por tanto, su admisión se hace muy difícil.

La introducción del tiempo tiene grandes y graves repercusiones en el Análisis Económico.

Permítaseme que cite un ejemplo que presentamos en el Congreso de ASEPUMA del año 2001, celebrado en Canarias. Para ilustrar las diferencias entre un análisis sintomático y un análisis en profundidad, veamos un ejemplo de cada uno de ellos.

Pensemos primero en el mercado de un bien cuya demanda, x_d , depende del precio p , el cual varía en el tiempo. Si estas relaciones se pueden formalizar mediante funciones continuas y derivables, tenemos que

$$x_d = f(p); p = g(t)$$

Es decir,

$$x_d = f[g(t)] = F(t)$$

y

$$\frac{dx_d}{dt} = \frac{dx_d}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} = f'[g(t)] \cdot g'(t) = F'(t)$$

Si el bien es normal, su demanda es decreciente con el precio. Esto es,

$$\frac{dx_d}{dp} < 0$$

Por tanto, cantidad y precio deben evolucionar en sentido contrario en el tiempo. Y viceversa, si cualquier aumento o disminución del precio está acompañada de una variación de la cantidad de signo opuesto, entonces el bien es normal.

Para hacer un análisis en profundidad de este mercado, consideremos ahora una función de demanda según la cual la cantidad demandada depende del precio y del tiempo. Esto es,

$$x_d = f[p(t), t].$$

Supongamos que esta función es diferenciable.

Si la demanda es normal, la cantidad demandada es decreciente en el precio. Esto es,

$$\frac{\partial x_d}{\partial p} < 0$$

Derivando la función de demanda, tenemos

$$\frac{dx_d}{dt} = \frac{\partial x_d}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial x_d}{\partial t}$$

de donde, si

$$\frac{dp}{dt} \neq 0$$

podemos despejar y obtenemos

$$\frac{\partial x_d}{\partial p} = \left(\frac{dx_d}{dt} - \frac{\partial x_d}{\partial t} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dt}}$$

En la expresión anterior

$$\frac{dx_d}{dt} - \frac{\partial x_d}{\partial t}$$

representa la variación en la demanda en el tiempo debida sólo al efecto indirecto causado por la variación del precio en el tiempo (esto es, descontado el efecto directo del tiempo sobre la demanda). La derivada total recoge la influencia global del paso del tiempo sobre la cantidad demandada, mientras que la derivada parcial es la influencia del tiempo directamente sobre x_d , excluyendo el camino del precio.

Si el bien es normal,

$$\frac{dx_d}{dt} - \frac{\partial x_d}{\partial t} \text{ y } \frac{dp}{dt}$$

tienen signo opuesto. Comencemos suponiendo que

$$\frac{dp}{dt} < 0.$$

Esto es, que el precio disminuye en el tiempo. Puede tratarse de un bien de alta tecnología cuyo precio baja porque tiene una alta tasa de obsolescencia y porque los costes se reducen rápidamente debido al progreso de las técnicas de producción.

Si por ejemplo, se observen reducciones en el precio del bien acompañados de reducciones de la cantidad demandada y, no obstante, que el bien sea un bien de demanda normal. Para ello es suficiente que la diferencia

$$\frac{dx_d}{dt} - \frac{\partial x_d}{\partial t}$$

entre la variación observable en la cantidad y la variación debida exclusivamente al paso del tiempo sea positiva. El segundo término descuenta, entre otras, las variaciones estacionales, es decir, las que ocurren y completan ciclos en periodos de tiempo cortos, dependiendo, por ejemplo, de las estaciones del año o los días de la semana, etc. Si estas variaciones son negativas y de magnitud suficiente (mayores, en valor absoluto, que las que se producen exclusivamente por el camino del precio), entonces se observa una reducción de la demanda compatible con la reducción del precio.

Economía del desequilibrio

Si admitimos la definición dada de equilibrio: «posición en la que se compensan las fuerzas que intervienen en esa situación», por desequilibrio debemos entender la ausencia de compensación, es decir, por lo menos una fuerza predomina sobre las demás.

En el mundo de la Economía, por extensión del lenguaje, se suele admitir por desequilibrio la diferencia entre cantidades concurrentes: activo-pasivo, cantidad ofrecida-demanda, ahorro-inversión...

El equilibrio tiene una impronta ética que hace que se asimile con lo bueno, sensato, deseable, aunque, como hemos señalado anteriormente, no siempre es verdad.

Así como el equilibrio tiende a perpetuarse, a convertirse en un fin, el desequilibrio es el motor que nos dirige y empuja hacia la situación de equilibrio. El desequilibrio tiende a enjugarse en la persecución de la estabilidad, no matemática.

Existen numerosos ejemplos de relaciones que suponemos de equilibrio, y sin embargo o son imposibles o no son estables. Un claro ejemplo puede ser el llamado ajuste clásico, en el cual el mercado tiende a la competencia perfecta, y según ésta, los beneficios extraordinarios no existen o tienden a desaparecer, ya que los ingresos marginales se igualan a los costes marginales.

Ahora bien, ¿qué empresario invierte en una empresa para no tener beneficios (ingresos menos costes) extraordinarios si ello es posible? El crecimiento económico de una empresa está determinado por la maximización de las ganancias obtenidas por el resultado de la actividad empresarial y no por el mínimo de los costes medios a largo plazo, como señala el mercado de competencia perfecta, con todas sus hipótesis, éticamente loables pero ajenas a la realidad empresarial.

Para poner en duda la existencia de equilibrio se utilizan distintos argumentos en diferentes ámbitos, desde los doctrinales hasta los puramente pragmáticos.

Con relación a estos últimos podemos señalar que las hipótesis de la doctrina clásica o neoclásica no se ajustan a la

realidad, o si se quiere ser más duro, no soportan la crítica que surge del enfrentamiento con la realidad. Veamos algunos de estos supuestos clásicos.

Si consideramos la conducta del agente económico, lo que se llamó *homo œconomicus*, no existe, ya que los agentes no sólo buscan su beneficio, ni son egoístas —altruistas— como nos hacen suponer. No entremos a discutir la racionalidad del sujeto económico porque nos podría llevar muy lejos y a profundas contradicciones. Nos limitaremos a señalar las dificultades de esta hipótesis, muchas veces encubiertas.

Como hemos señalado, la sincronía entre la conducta y la adopción de decisiones y la reacción del sistema no existe, al menos en un sentido único e inmediato.

El equilibrio, como señala Walras, no deja de ser un utensilio matemático para poder analizar, intuir, el mundo real. Las condiciones de unicidad y estabilidad son intelectualmente válidas pero, desde el punto de vista de la realidad, son altamente discutibles. El equilibrio es más un concepto teleológico que real, pues recoge un deseo o tendencia, ya que tiene muchas dificultades para ser entendido y aceptado como una situación que se cumpla o pueda verificarse en la realidad.

Si existiese el equilibrio tendríamos que plantearnos dos problemas. Uno, que estaríamos en una constante situación de cataclismo, en el filo de la navaja de los modelos clásicos de desarrollo económico. El segundo problema sería que no existe garantía alguna de que la evolución de la situación o actividad económica se acerque al equilibrio.

Desde la perspectiva doctrinal, los problemas se multiplican y se hacen drásticos, pues aparecen posturas dogmáticas que dificultan la discusión y aumentan la falta de flexibilidad de las diferentes posturas.

Con relación a este tema tenemos fundamentalmente dos escuelas antagónicas. La neoclásica, que defiende la idea de equilibrio, en el sentido más amplio y alto del concepto. Esto es, como el objetivo de la actividad económica y la mejor situación posible de una comunidad. Si la economía está equilibrada, la situación puede mantenerse de esa forma y en esa situación indefinidamente y conducirá a una posición casi idílica de estabilidad justa y duradera.

La escuela austriaca, con Von Mises y su discípulo Hayek a la cabeza, representa la postura diferente: si buscamos prosperidad y desarrollo económico debemos movernos en una situación de desequilibrio, en la que exista un estímulo para ir innovando, produciendo y mejorando para crear más y mejor y satisfacer nuevas necesidades que, querámoslo o no, irán apareciendo y serán el motor del desarrollo.

El problema, en el que no vamos a entrar en este momento, es dilucidar cómo debe ser ese desequilibrio, pues un abuso de esa discrepancia entre lo razonable y la máxima ganancia puede conducir a unas crisis de las que sea difícil y costoso salir.

Los supuestos neoclásicos nos dan como soluciones los puntos de equilibrio para obtener máximos beneficios con un volumen de producción fijo, ya que se supone que tenemos un artículo único y un precio también único. Pero si se pudiese distinguir entre distintas cantidades del bien, los máximos beneficios no serían los correspondientes a UN volumen de producción sino a un intervalo de producción.

EL CERO Y EL INFINITO

En la Economía el cero y la nada se pueden considerar como sinónimos. Es claro que decir «un saldo es cero» equivale a afirmar que no tiene nada, o quizá sea más correcto que «tiene nada», o que «tiene mucho» pero está equilibrado.

Esos conceptos se pueden complicar al profundizar en ello. ¿Qué quiere decir que un saldo es de 8 milésimas de euro? y ¿que el saldo es nulo? o ¿que no hay saldo si es de 0,008 €?

Acéptese me recordar que en los años cincuenta del siglo pasado, se procesó a una persona que, trabajando en un banco, al liquidar las cuentas corrientes se apropiaba de los céntimos de peseta que superaban el redondeo de cero y cinco. De esta manera consiguió una importante suma de dinero.

Cuando en el mundo empresarial o financiero decimos que se ha vaciado el mercado, ¿qué estamos afirmando? ¿Un mercado vacío es lo mismo que sin clientes, mercancías, agentes?

En la jerga o en el lenguaje coloquial, las palabras cero, vacío y nada se pueden utilizar como sinónimas, pero en un lenguaje estrictamente científico y riguroso pueden expresar, y expresan, ideas y conceptos distintos.

Todos sabemos que dividir es medir, siendo la unidad el denominador o divisor. Cuando este es muy pequeño, tiende a cero, el resultado, evidentemente es muy grande, es lo que se llama infinito. En este sentido la noción recíproca del cero podría considerarse el infinito.

En Economía son frecuentes las apelaciones al infinito, aunque bajo distintos títulos, como decir un «tiempo suficientemente largo», a «largo plazo» en un «horizonte ilimitado en el tiempo»...

Cuando se intentan formalizar los conceptos y tipos de estabilidad, debemos introducir el concepto matemático de infinito, con lo que esta palabra debe adquirir todo su valor semántico, semiótico y su tratamiento sintáctico.

Mientras en la idea de estabilidad normal nos podemos mover en el campo de lo finito, estamos en un horizonte más o menos próximo (lejano) pero finito, cuando nos referimos a la estabilidad asintótica, la presentación de cercanía o proximidad se debe desechar y sustituirla por una perspectiva persistente en el tiempo, esto es, eternamente lejana en el tiempo.

La estabilidad asintótica y un horizonte temporal muy lejano tiene sentido e interpretación en las ciencias de la Naturaleza, pero en las llamadas ciencias del hombre o sociales, estos conceptos son controvertibles y de una utilización dudosa, aunque se apliquen a estas ciencias con una relativa frecuencia.

Es claro que intuitivamente el cero y el infinito están muy lejanos entre sí. Sin embargo, cada vez aparecen más trabajos en los que la idea de estos conceptos está más cercana. En el número de marzo de 2009 de *Investigación y Ciencia*, versión española de *Scientific American*, aparece un trabajo de Emilio Elizalde en que se relacionan las fluctuaciones energéticas en el vacío mediante el estudio y análisis del efecto Casimir,

a través de las series armónicas que se estudian mediante la función zeta (ζ) de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

con $s \in \mathbb{C}$ esta serie es convergente si la componente real de $s > 1$.

El efecto Casimir retoma la disquisición aristotélica entre continuidad, y contigüidad. Dos placas del experimento de Casimir están juntas, infinitamente próximas formando una unidad. ¿El resultado de este experimento es que aparecen unas fuerzas que surgen del vacío, de la nada y son mensurables, poniendo en jaque no sólo el concepto de vacío, de la nada, sino el de continuidad?

Entre los problemas más importantes de la Teoría del Conocimiento, tenemos el cero, la nada y el conjunto vacío, por una parte y su supuesto complementario, el infinito, el todo, por otra.

Veamos algunos matices de estos conceptos. Empecemos por el cero, haciendo un poco de historia.

El cero aparece para resolver problemas de distinta índole, en diferentes lugares, tan alejados como las actuales tierras de la península del Yucatán, Honduras y Guatemala, lo que corresponde a la civilización Maya, y la antigua Mesopotamia, en la tierra de los sumerios, el actual Irak, o los pueblos de habla semita, los correspondientes a los actuales territorios del Próximo y Medio Oriente.

Los mayas, para resolver sus problemas de astronomía, arquitectónicos y, su gran obsesión, la medida del tiempo, más concretamente el calendario, inventaron el cero.

Por razones aparentemente espurias, es Spengler el único autor que opina que los pueblos semitas fueron los descubridores del cero. El resto de los historiadores consideran que el cero aparece en la antigua Mesopotamia, en la tierra de los sumerios, el actual Irak, para satisfacer necesidades comerciales. Alejandro Magno se encargaría de llevar este «símbolo» a

Babilonia y a la India. A través del comercio, los italianos extenderían el cero al resto de Europa.

La diferencia entre los dos orígenes llevó a considerar el cero desde dos puntos de vista: los mayas, el técnico y los orientales, en la perspectiva posicional.

Los griegos clásicos no desperdiciaron la oportunidad de profundizar en los aspectos filosóficos del concepto que nos ocupa.

Considerando el cero como un número, podría tener la interpretación de medida, lo que originaría una contradicción, al tener algo de nada. Debemos destacar que desde la Semiótica, una cosa es que exista el símbolo —el cero— y otra que exista lo que representa.

En la axiomática de Peano se incluye el cero como número natural o se comienza con el uno, según las distintas fuentes. Esta axiomática es reacia a considerar los números como la medida de cantidades, son más proclives a considerarlos como conjuntos. ¿Puede haber un conjunto sin elementos? Conceptualmente sí, el conjunto vacío.

En la aplicación y utilización del cero, existen numerosas dificultades, según el campo a que se aplique. Pensemos en la Física. Al referirnos a la temperatura, cuando hablamos del cero (0 grados) absoluto, estamos suponiendo y admitiendo la ausencia total de energía. ¿Existe esta posibilidad? Parece que no. Según la Física cuántica, el reposo absoluto no existe, por lo tanto hay movimiento y en definitiva energía. En el campo de la Economía también surgen dificultades. Pensemos en una función de demanda con elasticidad unitaria, lo que implica que es una hipérbola equilátera, referida a los ejes-cantidades, precios. Si el precio estuviese muy cerca del cero, la cantidad demandada sería infinitamente grande, mientras que por una cantidad infinitamente pequeña del bien estaríamos dispuestos a pagar una cifra infinitamente grande.

La Estadística está a caballo entre lo que podríamos llamar ciencias de la realidad y las ciencias filosóficas, las llamadas por Popper, metafísica. Cuando en la teoría de la probabilidad decimos que la probabilidad de que ocurra un suceso es cero, no pensamos en su imposibilidad real, existencial,

sino que ese suceso es «moralmente» imposible, aunque podría acaecer.

Aparece otro matiz en la concepción del cero, el cero moral: la nada.

«La idea de la nada es un concepto complejo, fructífero, sugerente y resbaladizo, que se puede simbolizar mediante la oscuridad. En efecto. Por nada podemos entender la carencia o ausencia de todo ser, entendiendo por ser la cosa creada o existente, bien sea contingente o no»⁹.

Para definir la nada debemos recurrir a la antifrasis, es decir, tenemos que hablar y determinar lo que no es.

Al definir un ente, contingente o no, es preciso señalar qué es y qué no es. Definir es poner límites, acotar. En el caso que nos ocupa tenemos que apelar a ideas ajenas a nuestra pretensión: determinar lo que es la nada.

Para ello es preciso que recurramos a conceptos teóricos.

La Real Academia de la Lengua da varias acepciones de la palabra nada. La primera, «no ser, carencia absoluta de todo ser»; la tercera establece: «Ninguna cosa, negación absoluta de las cosas, a distinción de las de las personas». Esta descripción supone una contradicción, pues indica que existe lo que no existe o que es lo que no es.

Permítaseme una breve excursión por los alrededores de la nada, por la idea de la creación y de la existencia, conceptos muy unidos y profundamente imbricados con el tema que nos ocupa.

Desde Leibnitz a Heidegger, pasando por don Miguel de Unamuno, el hombre se ha formulado la pregunta: ¿Por qué existen las cosas? ¿Por qué existe el mundo?

Si crear es producir algo de la nada, es preciso que exista un sujeto, algo o alguien, con capacidad creadora. Además lo creado se debe diferenciar del creador, de lo preexistente, de lo previamente creado. En este sentido, lo creado no tiene una génesis propiamente dicha, no hay materia prima. Sin embar-

⁹ Costa y otros (2007).

go debemos plantearnos, la nada, ¿ha sido creada? ¿Se puede crear la nada?

Es claro que el mundo, nuestra realidad, existe, ¿ha sido creado? En caso afirmativo, ¿por quién? Desde la teogonía, teodicea y teología de distintas creencias, la respuesta parece clara, el mundo ha sido creado por Dios, o los dioses.

Si el mundo ha sido creado, surge otra pregunta: ¿Dónde está el creador? Julián Marías subraya que no se puede partir de la idea de Dios, se podrá llegar a Él, pero es el ausente, el escondido.

La relación entre el creacionismo y la nada se puede deducir sin dificultades aparentes. Ferrater Mora en su Diccionario de Filosofía defiende que el admitir que el mundo ha sido creado por Dios es una verdad absoluta, mientras que el admitir que de la nada no surge nada es una afirmación probable.

Para terminar esta incursión por la creación recordemos el célebre axioma (¿postulado?) de la metafísica clásica: *ex nihilo nihi fit* (nada surge de la nada) o el cristiano: *ex nihilo fit ens creatum* (de la nada hizo los entes).

Todavía nos queda por señalar otro problema. Admitiendo que la realidad existe —yo existo— o quien me ha pensado (recordemos otra vez a don Miguel de Unamuno) debemos concluir que la nada se acaba, tiene límites. La nada está restringida por unos límites, pero la frontera es algo. ¿Qué ocurre fuera de ese algo?

Antes nos hemos referido a la aplicación del concepto del cero a otros campos del conocimiento. Con la idea de la nada absoluta tenemos parecidos problemas. En la Física no se concibe la nada absoluta, siempre hay algún átomo suelto, corpúsculos lumínicos u ondas electromagnéticas. La nada en sentido estricto, absoluto, dificultaría el principio de indeterminación de Heisenberg, ya que no podríamos determinar la situación energética de la región, pues aunque no se asegure la posición de una partícula, tampoco podemos asegurar dónde no está, así que *a priori* no se puede negar la existencia del vacío FÍSICO en algún lugar y momento determinado. Ahora bien, esta posibilidad es altamente inestable, ya que está sometida al tiempo y espacio determinado, pero cambiante.

Lo que sí se puede afirmar es que la nada y el vacío físico tienen una frontera a partir de la cual empieza a haber algo. Otra cosa es a qué región pertenece ese límite.

Matematizando esto, querría decir que la frontera del vacío físico no tiene por qué pertenecer al vacío sino al objeto en que existe, es decir, podríamos decir que, desde el punto de vista matemático, el vacío físico es abierto.

Estas consideraciones nos llevan a concluir que la nada como concepto absoluto tiene muchas y profundas dificultades, no así el concepto relativo, aunque algunas veces se confunde con otra idea próxima: el vacío.

Al igual que los conceptos anteriores, el vacío es un fonema con el que tratamos de expresar la carencia de objetos, en el sentido más amplio, esto es, la ausencia de entes.

Ya nos hemos referido a la Física, en el sentido de que el vacío, como tal, no existe, pues siempre tenemos ondas, o átomos sueltos que pululan por el espacio, supuestamente vacío.

La RAE define el concepto de conjunto atendiendo o haciendo referencia a la existencia de elementos «unido...», «mezclado...», «agregado...», «aliado...» Al definir en términos matemáticos el vocablo conjunto (acepción 10.^a) dice: «Totalidad de entes matemáticos que tienen una propiedad común».

Don Julio Rey Pastor escribe: «la observación de cada ente material, cualquiera que sea su naturaleza, despierta en nosotros la idea de unidad; la consideración de varios entes, prescindiendo de su naturaleza y de su ordenación en el espacio o en el tiempo, da origen a la idea de pluralidad o conjunto. Estas ideas tienen un valor puramente relativo, pues todo ente material es, a su vez, un conjunto de otros entes que lo componen, y todo conjunto puede considerarse también como una unidad»¹⁰. Más adelante da los criterios para definir un conjunto: «un conjunto está determinado cuando se da un criterio que permita reconocer para cada ente arbitrario si pertenece o no al conjunto»¹¹.

¹⁰ Rey Pastor, Julio (1966): *Elementos de análisis algebraico*, 15.^a ed., Madrid, pág. 17.

¹¹ Rey Pastor, Julio (1966): *Elementos de análisis algebraico*, 15.^a ed., Madrid, pág. 18.

Bertrand Russell pondrá objeciones a esta definición de conjunto, pues mediante su famosa paradoja —el catálogo de una biblioteca— demostrará que existen elementos que cumplen la propiedad requerida y sin embargo no pertenecen al conjunto.

Cuando nos centramos en el conjunto vacío, aparecen algunos problemas, quizá más lingüísticos que reales. En efecto, la RAE define el conjunto vacío como: «el que no tiene ningún elemento». En esta fórmula aparece lo que se podría considerar una *cotradictio in terminis*, una autentica antifrasis, pues según las definiciones dadas, un conjunto sin elementos, ¿es un conjunto?

Desde la perspectiva matemática no hay duda, el conjunto vacío existe, es operativo y tiene su interpretación y sentido. El tamaño de un conjunto se expresa por su cardinalidad. El cardinal del conjunto vacío es, precisamente, el cero.

Desde Aristóteles hasta el siglo XVII se mantuvo la máxima *horror vacui*. Torricelli, Pascal y Boyle relacionaron los estudios del vacío con la presión atmosférica y en definitiva, con el campo del empirismo, admitiendo la existencia de algo parecido al vacío.

En el campo filosófico, se siguió postulando la existencia de un fluido, gas, que evitase el temido vacío.

Descartes retrasó la revolución newtoniana al oponerse al vacío, no se sabe si por convicción, horror al vacío, por miedo a la Inquisición o por mantener *entente cordiale* con la Compañía de Jesús.

Leibniz será un ferviente opositor a la existencia del vacío. Aunque más adelante volveremos sobre el tema, permítanme que en este momento destaque la ley de la continuidad defendida por este autor que, según la ley, permitirá llenar el vacío mediante la evolución de los cuerpos. Para Leibniz, el vacío puede explicarse por la existencia de milagros o del azar.

Para Newton el vacío era imprescindible ya que evitaba las perturbaciones en la dinámica del sistema planetario. Con Newton el mundo pasa de ser algo lleno, continuo y compacto a algo vacío o casi vacío.

El siglo XX finaliza con la dualidad entre el vacío y el no vacío.

La física cuántica resolverá el problema al considerar que las fluctuaciones entre las partículas y antipartículas tienen como resultado unas fluctuaciones de medida nula¹².

Los conceptos de cero, nada y vacío, aunque intuitivamente no ofrecen demasiadas dificultades desde la perspectiva de la Semiótica, sí presentan problemas, ya que sin ser vocablos sinónimos, sí se utilizan como tales. Sin embargo, en cada ciencia se tiende preferentemente a usar uno de estos conceptos. En general no se suelen matizar las diferencias que existen entre ellos, por lo que sí se debe tener claro el contexto en que se utilizan, ya sea físico, matemático o filosófico.

El infinito se puede considerar como el complemento del cero y, al igual que él, su definición tiene matices y aspectos análogos al del cero. A veces se equipara lo muy grande con lo muy pequeño.

La definición de infinito puede tener matices teleológicos, potenciales, actuales e incluso teológicos. Se identifica con la luz, al igual que el cero se asimila a la oscuridad.

El infinito siempre ha tenido una carga de la que le ha costado mucho tiempo y esfuerzo desprenderse, desde San Agustín y Santo Tomás, que asimilaron lo infinito a la unicidad, a lo único.

Otros lastres han sido puramente lógicos, al aparecer contradicciones. Pensemos en las paradojas, algunas reseñadas más arriba, como la de Zenón, Russell, el famoso hotel de Hilbert, los triángulos de Sierpinski, o las curvas de Peano y Hilbert.

Incluso el símbolo representa dificultades de interpretación. En efecto, «Wallis introdujo en el siglo XVII el símbolo de infinito. No está claro si le inspiró la idea de *m* (mil) como un número muy grande y de este símbolo se pasó a la lemnis-

¹² Parece que la nueva teoría de la gravedad cuántica de bucles, Bojowald, M. niega esta posibilidad al considerar que existen hipotéticos átomos de espacio tiempo que serían unidades indivisibles de distancia. *Investigación y ciencia*, diciembre de 2008.

cata, en la que se pueden recorrer sus puntos sin llegar al final. «Casualmente» este símbolo se utiliza en el Tarot, para designar a El Mago. Esta carta esta asociada al símbolo \aleph , que más tarde utilizará Cantor, quien también relacionará la idea de infinito con Dios»¹³.

A veces la palabra infinito se confunde con cualquiera o con todo, cuando hablamos de TODO hombre tiene corazón, nos estamos refiriendo a los que han existido, existen y existirán, pero siempre en un número finito, muy grande, pero finito. Sin embargo, cuando decimos que en todo triángulo sus ángulos interiores suman 180 grados, nos estamos refiriendo a los infinitos triángulos que existen, han existido y existirán. Si cambiamos el sintagma «todo» por «cualquiera», la expresión tendría el mismo sentido. Siendo palabras diferentes, con distinto significado, se las puede sustituir e interpretar por infinito.

Si consideramos un mundo rectilíneo, el cero sería la no existencia de una propiedad o el origen, mientras que el infinito correspondería con la totalidad de esa propiedad. El menos infinito haría referencia a la propiedad considerada, pero en sentido negativo.

Si nos movemos en un mundo circular, el infinito se correspondería con el opuesto al cero, la totalidad. La manera o el camino para acercarnos a esa plenitud, es lo que designamos más o menos infinito.

En el sentido ético, la diferencia es clara: el infinito positivo es la bondad plena, completa, absoluta; mientras que el negativo se corresponde con la maldad total. El cero será la ausencia de bien, en el sentido de neutralidad (Apocalipsis 3:15,16).

Históricamente se asoció el infinito al desorden, al caos. Euclides trata de evitar la palabra sustituyéndola por «mayor que cualquiera». El *apearon* griego significa sin fin, lo ilimitado. Algunos autores asociaron el infinito con la absorción, aniquilamiento o engullimiento, de la misma forma que en Álgebra el infinito absorbe, engulle a algunos números¹⁴, como por ejemplo los reales o los imaginarios

¹³ Costa y otros (2005).

¹⁴ Salvo indeterminaciones.

$$(a \pm \infty, a \cdot \infty, a^\infty, \dots) \text{ con } a > 1$$

Gran parte de las dificultades léxicas y semánticas desaparecen si distinguimos entre el infinito actual y potencial.

El infinito potencial lo podemos asimilar con la idea, tan querida por la Economía, de los multiplicadores; siempre tenemos uno más, nunca se termina el proceso, siempre podemos seguir. A este infinito potencial podríamos darle una interpretación teleológica.

El infinito potencial es el utilizado en el cálculo infinitesimal, siempre es posible acercarnos un poco más, siempre podemos, aunque surjan los problemas señalados al hablar del cero como las célebres paradojas y contradicciones desde Zenón hasta Kant.

El infinito actual —como unidad— sería aquello cuyo mayor no puede ser pensado. Obsérvese que esta es la definición que San Anselmo da de Dios, pero una cosa es que exista la idea, el concepto de infinito y otra, muy distinta, que exista el infinito como tal, como unidad.

La idea de unidad surge al considerar que, por ejemplo, los números naturales son una «cosa», UN concepto que tiene un número muy grande, ilimitado de elementos, pero que consideramos como uno. Si comparamos el conjunto de los números naturales con el de números pares, «parece» que tendremos el doble de los primeros, aunque la lógica y la racionalidad nos indican que ambos son infinitos. Esto nos conduce a la idea de que pueden existir «muchos» infinitos, lo que creará problemas de comparación, medición y existencia, lo que llevará a Cauchy y Gauss, entre otros, a negar la existencia de varios infinitos.

Sabemos que la medida de un conjunto se determina por su cardinalidad y ambos, los números naturales y los pares tienen el mismo cardinal, esto es, son conjuntos equipolentes, al igual que los puntos de una recta, de un triángulo, los racionales o los de un conjunto de Cantor.

Teniendo en cuenta la proposición «el todo es mayor que las partes», el infinito de los naturales y el de los pares deberían ser distintos pues uno, los pares, es una parte del todo,

los naturales. Sin embargo no es así, ya que ambos infinitos tienen el mismo cardinal y por tanto son iguales.

Podemos soslayar parte de las dificultades para comparar conjuntos estableciendo que un conjunto es infinito cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre él y una parte propia de él. Esta definición ratifica e implica la presentación y aceptación del infinito potencial.

Ya hemos señalado la idea teleológica del infinito en el sentido de un paso más, de reiterar, insistir, repetir un proceso o razonamiento, lo que origina problemas, algunos señalados, como la paradoja de Aquiles y la tortuga.

Otro problema que surge es el que se ha señalado con la frase: «el todo es mayor que las partes». En el mundo de lo infinito esta proposición no puede aceptarse, tanto desde la perspectiva lógica como la matemática o la física. Quizá podría aceptarse que el todo es mayor o igual que las partes.

El gran estudioso del infinito, Cantor, descubrió que el número de puntos de un segmento y de un triángulo era el mismo ya que, según demostró, podía establecer una correspondencia biyectiva entre ambos conjuntos. Este descubrimiento le trajo muchos problemas, incluso algunos personales, pues las discrepancias con su maestro, Kronecker (que, como buen constructivista pensaba que: «Dios creó el número natural, el resto es obra de los hombres») le llevaron a una agria discusión y parece que su, hasta entonces preceptor, llegó a sabotear un artículo de Cantor. Después de leerlo y estudiarlo, manifestó la célebre frase: «lo veo pero no lo creo».

Quizá la intervención de Dedekind contribuyese a la aparición del artículo «perdido», de Cantor. Las ideas de este trabajo, además de escandalizar en ciertos círculos, le atrajeron los más duros ataques: desde llamarle charlatán, corruptor y renegado, hasta aprovechar sus crisis maniaco-depresivas para tildarle de loco.

Cuando esta enfermedad fue avanzando, llegó a pensar que Dios estaba detrás de los transfinitos y que se había servido de él para comunicarlo a la humanidad, por lo que debía darse un tratamiento teológico más que puramente matemático.

Para Cantor el primer ordinal transfinito es ω . No deja de ser curioso que en la iconografía cristiana se utilice este símbolo para designar a Dios. Igualmente muchos pensadores como el jesuita y paleontólogo Teilhard de Chardin también habla en sus obras del punto ω , aunque con un sentido distinto: teleológico.

A partir de este número, sumando la unidad podemos obtener el conjunto

$$\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + \omega = 2\omega, \dots, \omega \cdot \omega, \omega^\omega$$

El problema del continuo, fue en cierta forma resuelto por Gödel y Cohen, quienes demostraron la independencia del continuo con la teoría de conjuntos.

El infinito, tanto actual como potencial, aparece en la Teoría Económica al analizar los problemas de los multiplicadores y en la teoría de la estabilidad.

Si nos fijamos en los multiplicadores (el keynesiano de la inversión, por ejemplo) la referencia al infinito, casi siempre implícita, es la acepción del infinito actual, pues se piensa y considera el infinito como un todo completo, la suma de una serie convergente. A veces se cita el proceso, «una vez más», lo que podría indicar la potencialidad del concepto. Este razonamiento o argumento es falaz, pues lo utilizamos para explicar el proceso como una unidad, cuyo resultado es la inversión dividida por la propensión marginal al ahorro.

Si consideramos algún tipo de acelerador, aunque sea en la versión más simple o naïf, tendremos las mismas dificultades.

En la teoría de la estabilidad asintótica aparece el infinito, en este caso, claramente potencial, ya que estudiamos la evolución de un sistema en que el tiempo aumenta indefinidamente, añadiendo —suponiendo su existencia— una unidad más.

Sin entrar a discutir la existencia del infinito, potencial o actual, sí debemos indicar que en la naturaleza, en el mundo de la realidad, no existe y en algunos campos su utilización, virtual, es francamente escasa. En las ciencias, llamadas del hombre, desde la Sociología a la Medicina, pasando por la Econo-

mía, lo infinito es por una parte un instrumento conceptual sin plasmación en la realidad y por otra, cuando se habla, por ejemplo, del tiempo, carece de sentido y es una clara antinomia, pues no podemos decir con cierto rigor que el tiempo se hace infinito o que una variable tiende a infinito. En este campo del conocimiento, un plazo de cinco, diez o treinta años es más que suficiente para que cambien todos los supuestos sociales que se habían postulado para basar un razonamiento.

CONTINUIDAD

La continuidad es un concepto polisémico que ha dado muchos frutos a la historia y al progreso científico. En la Matemática es básico para profundizar en numerosos conceptos y aplicaciones que no es el momento de mencionar. Lo mismo puede decirse de la Física clásica o de otras ciencias como la Economía.

¿Qué sentido tiene decir que una magnitud económica tiende a cero? En términos reales, de la evidencia empírica, su utilización es discutible. El concepto de continuidad es fundamental tanto en el campo puramente matemático como en el de sus aplicaciones. En la llamada economía marginalista, los conceptos de continuidad y derivabilidad son básicos.

¿Qué sería de la Teoría Económica sin el concepto e implicaciones de continuidad? Pensemos, aunque sea por vía de ejemplo, lo que sería del análisis marginal de la economía si no se utilizase el concepto de continuidad ni se aceptasen sus condiciones metodológicas.

En otras ciencias y en diferentes aplicaciones se ha utilizado la hipótesis de continuidad bajo el eufemismo de fina divisibilidad.

Aunque el concepto matemático de continuidad es riguroso y unívoco, en sus aplicaciones se suele admitir un conjunto de supuestos que flexibilizan el rigor conceptual y facilitan su utilización. Lo grande y lo pequeño son inseparables del ámbito en que los apliquemos y según las circunstancias en que los empleemos. Supongamos un contexto astronómico, una separación de miles de kilómetros lineales, un año-luz, por ejemplo, se puede considerar como una distancia muy pequeña.

En los estudios económicos ocurre lo mismo, la escala y el contexto son fundamentales, una variación unitaria puede admitirse como muy grande o muy pequeña según las circunstancias.

En la Física cuántica, una distancia de micras puede ser demasiado grande para algunos experimentos.

Para medir la fuerza Casimir se ha comprobado que unas placas de 1 cm^2 separadas una micra, se atraen con una fuerza de 10^{-7} Newton, mientras que si la separación es de 10 nm, la fuerza de atracción es de una atmosfera¹⁵.

La continuidad, desde la perspectiva filosófica, tiene unos matices que debemos destacar, tanto por la visión histórica, como por la utilización y significación actual, que a veces se usan como sinónimos. Me refiero a los conceptos relacionados con aquélla, de sucesivo, contiguo y contacto.

Sucesivo implica que un elemento está después de otro, que lo sigue, que no existen elementos de la misma clase entre ellos. Después del 3 está el 4, sin que haya ningún otro número natural entre ellos.

Contacto será, ahora, la acción de tocarse. Evidentemente «tocarse» tendrá diferentes acepciones según las circunstancias pero, para el presente trabajo, podemos admitir que supone que dos objetos estén tan cerca uno del otro, que no haya distancia entre ambos.

La contigüidad implica siguiente, continuación, pero no contacto. Se dice que dos cosas están en contacto cuando sus límites o finales exteriores coinciden en un punto con las mismas coordenadas espacio-temporales, es decir, sus límites son uno; por tanto son contiguos. Ahora bien, los elementos contiguos no tienen por qué estar en contacto. Los elementos en contacto son contiguos, no así los sucesivos.

Piénsese en el ejemplo anterior de los números naturales, el 3 y el 4 son contiguos y no están en contacto.

Aristóteles, en su Metafísica, define lo continuo como la magnitud que tiene sus partes unidas en un todo, esto es, sus partes tienen límites comunes.

¹⁵ Elizalde, E. (2009): pág. 59.

Nuestro problema es dilucidar entre lo que se piensa teóricamente y la realidad sobre la continuidad. Una realidad que suponemos y admitimos que es continua, ¿podemos aceptar esa afirmación como verdadera?

Las paradojas clásicas, como la de Zenón o las opiniones de Demócrito se soslayan con las de El Estagirita, al distinguir éste entre potencia y acto. De esta forma se permite dividir un ser sin necesidad de afirmar su divisibilidad (o indivisibilidad) absoluta.

En general se aceptó la continuidad, tanto por los neoplatónicos como por los estoicos, que consideraban al universo como un continuo dinámico en donde no existen interrupciones ni espacios temporales.

En el medievo se comenzó a barruntar la diferencia entre continuidad aplicada a la materia y la aplicada al espíritu. Santo Tomás dio distintas interpretaciones que permitieron distinguir entre contacto real y espiritual, entre lo cuantitativo y lo virtual.

Descartes rechazaba el vacío, pensando que la materia —espacio— constituía un continuo.

Fue Leibniz quien, con más ahínco, defendió la continuidad o ley de la continuidad, como le gustaba llamarla. Consideraba que, al igual que las figuras geométricas, todas son una evolución de otras, primigenia, lo mismo pasa con la Naturaleza.

Es claro el ejemplo de Leibniz sobre la geometría. La diferencia entre una circunferencia, una elipse y una hipérbola radica en la distancia focal. Los hiatos y discontinuidades que aparecen en la naturaleza se deben a meros accidentes, a milagros y al azar, pues para él (Principios de la Naturaleza...), todo está lleno.

Kant se opondrá a la divisibilidad infinita pues, por una parte, el ente se disolvería en la nada, y por otra parte, su extensión desaparecería. El problema kantiano se resolverá al distinguir entre el espacio considerado como una realidad en sí, o como algo fenomenológico, esto es, al separar el espacio fenomenológico —sensible— y el nóumeno —racional—.

La polémica —continuidad frente a discontinuidad— ha seguido dos trayectorias fundamentales: Una, se ha centrado más en el campo físico-matemático que en el filosófico y con los descubrimientos atómicos de Bohr, Planck, Einstein..., se ha unido el problema de la continuidad al del espacio y éste al del tiempo, apareciendo nuevas investigaciones en las que estos conceptos se estudian por separado. La otra, en las que aparecen unidas, como las partículas espacio-tiempo¹⁶, aunque algunos autores, como Gödel, pongan en duda la existencia del tiempo como tal.

Desde la perspectiva matemática, todos sabemos lo que es continuidad y lo que supone.

Recordemos que τ es una topología, definida en el conjunto X si

$$\tau \in \mathcal{P}(X)$$

siendo $\mathcal{P}(X)$ partes de X (el conjunto de todos los subconjuntos de X) y verifica

- * $\Phi \in \tau, X \in \tau$; donde Φ denota el conjunto vacío.
- * La unión arbitraria de elementos de τ pertenece a τ .
- * La intersección finita de elementos de τ pertenece a τ .

Los elementos de $\mathcal{P}(X)$ pertenece a τ se llaman abiertos si A es un cerrado y si, y sólo si A^c (complementario de A) es un abierto, es decir $A \in \tau$, esto es, los cerrados son los complementarios de los elementos de la topología y verifica:

- * La unión finita de cerrados es un cerrado.
- * La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado.

Centrémonos en el concepto general de continuidad: Si τ y $\tilde{\tau}$, dos topologías, o espacios topológicos, distintos o no, diremos que la función

$$f : \tau \rightarrow \tilde{\tau}$$

¹⁶ Seguido, todo junto como una sola palabra.

es continua si la antiimagen de cada abierto es un abierto, esto es, si

$$\forall A \in \tilde{\tau}, f^{-1}(A) \in \tau$$

Dado que en general, la aplicación de las matemáticas a la economía se hace, normalmente, dentro de la matemática de lo real, esto es, se trabaja dentro de los números reales, $[\mathbb{R}]$ nos limitémonos a ella.

Una función $f(x)$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, se dice que es continua en un punto x_0 , si está definida en el entorno de ese punto y se verifica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

O bien, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x_0, \varepsilon) \text{ tal que si } |x - x_0| < \delta$$

entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

lo que supone que para cualquier x , perteneciente al entorno de x_0 , tiene su imagen $y_0 = f(x_0)$ en el entorno de $f(x_0)$ y, además está tan próximo a $f(x_0)$ como queramos, según la cercanía de x a x_0 .

En definitiva, el concepto de continuidad supone que no hay conjuntos vacíos en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ni en su imagen

$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Este concepto y su aplicación no supone, ni implica, demasiadas dificultades, siempre que nos movamos en un mundo apropiado, como en el campo matemático, en el que no existen especiales trabas para hablar de límite, continuidad... u otras aplicaciones en las que no tenemos por qué considerar su correlato semántico.

De las tres dimensiones que tienen los signos en el universo de las matemáticas, nos quedamos con dos de ellas. Esto es,

nos fijaremos en la Pragmática y en la Sintaxis. La Semántica aparecerá con posterioridad, al hacer una interpretación o aplicación de los objetos o elementos matemáticos.

En el mundo abstracto, en el que no hablamos de aplicaciones o intensidades, la continuidad y sus secuelas son fácilmente asumibles sin entrar en su conveniencia conceptual, como la introducción de la derivabilidad o diferenciabilidad.

En el ámbito de la teoría de la decisión también es frecuente la enumeración de axiomas (yo diría, postulados) de la continuidad en las distintas doctrinas (axiomáticas).

Cuando del mundo abstracto pasamos al concreto surgen los problemas y los inconvenientes, apareciendo contradicciones y dificultades que son difíciles de resolver con alguna cláusula *ad hoc*, como hasta ahora se ha hecho.

La generalización matemática del concepto de continuidad puede tener sentido, aunque hay numerosos ejemplos en los que el concepto y la aplicación estricta pierde su significado.

Pensemos en la Demografía y en las ciencias actuariales donde se habla del incremento infinitesimal de una población o del incremento infinitesimal de la vida de una persona, expresión que es cuando menos discutible, aunque sí tiene razón de ser cuando nos refiramos a la edad. Es posible que una persona tenga 28,345... años, cualquiera que sea la escala o calendario que usemos.

Otro problema es cómo utilizaremos y si ponderaremos o no esas cifras.

Cuando consideramos otras características como la edad, la salud, la sabiduría, la madurez, o la satisfacción de una persona, sí puede tener sentido el hablar de continuidad matemática, igual que hablamos de una característica intensiva, de un fluido... En definitiva del mundo de las intensidades.

Los psicólogos consideran que la percepción es posible gracias a un flujo constante de información, lo que implica que suponen que la información es continua y la percepción, no necesariamente.

En los estudios de la percepción se suelen considerar tres elementos característicos: a) es subjetiva, propia de cada individuo; b) es selectiva, cada individuo atiende y procesa lo que le interesa, y c) es temporal, se produce en cada momento.

Tenemos dos elementos fundamentales de la percepción, las sensaciones y la intensidad con que se sienten o perciben esos estímulos.

Se suele considerar que en el análisis de las percepciones, teniendo en cuenta la teoría de los umbrales de Max Weber, existen tres tipos de niveles: a) umbral mínimo, detecta la existencia de la sensación; b) el umbral máximo se corresponde con la intensidad en que el estímulo deja de ser percibido por el sujeto, un ejemplo típico puede ser el dolor o la luz; c) el umbral diferencial se corresponde con el estímulo que al variar la intensidad es percibida por el sujeto.

En algunas ciencias se suele admitir que existe una función, matemática, que relaciona las sensaciones y las percepciones. Esta función, admitiendo su existencia, se piensa y admite en general que, además de ser continua ha de ser derivable.

Admitiendo la teoría de Max Weber, la continuidad es muy discutible.

Si existiese, o admitiésemos la función, ésta no sería continua sino escalonada o en el mejor de los casos con tramos de «continuidad»; esto es, casi continua, o discontinua de primera especie o de salto finito.

En cuanto a su campo de definición, tendríamos un intervalo en el que el extremo inferior se correspondería con el umbral mínimo. El extremo superior del campo de definición será el umbral superior. Los puntos de salto se corresponden con los distintos umbrales de diferenciación.

Señalemos que cuando la intensidad varía en una cantidad infinitamente pequeña, puede ser que tengamos, o no, repercusión en la percepción, pero es importante destacar que esa variación infinitamente pequeña del estímulo no pierde sus propiedades, esto es, mantiene su estructura y naturaleza.

En el campo de la Economía, este problema se ha soslayado de manera más o menos elegante. Cournot, padre de la aplicación de las matemáticas a la Economía, resuelve el problema diciendo: «Admitiremos que la función $F(p)$, que expresa la ley de la demanda o de las ventas, es una función *continua*; es decir, que no pasa súbitamente de un valor a otro, sino que en el intervalo adopta los valores intermedios. Lo contrario podría suceder si el número de consumidores fuese muy limitado»¹⁷.

Más adelante, en la página siguiente, escribe: «Si la función $F(p)$, es continua, gozará de las propiedades comunes a todas las funciones de esa naturaleza, y sobre la que se basan tantas aplicaciones importantes del análisis matemático; *las variaciones de la demanda serán sensiblemente proporcionales a las variaciones del precio, mientras estas sean pequeñas fracciones del precio original*».

El postulado o hipótesis de fina divisibilidad establece que un bien se puede dividir indefinidamente y las partes obtenidas mantienen las propiedades del todo, esto es, del bien antes de efectuar la partición.

Esta petición de principio o suposición ha sido utilizada con profusión en las distintas aplicaciones del cálculo diferencial a otras ciencias, como la Economía, Biología, Física..., sin embargo, este supuesto es de difícil aceptación en determinados casos.

Aleksandrov hablando de la continuidad, cuenta la siguiente anécdota: «La abuela ha comprado tres patatas y tiene que dividir las a partes iguales entre sus dos nietos. ¿Cómo debe hacerlo? La solución es: «haciéndolas puré»¹⁸. Nótese: primero, que el puré tiene las mismas propiedades que la patata entera; segundo, las patatas se pueden dividir, pero no así otros elementos, no se puede hablar de media persona. Si suponemos que tenemos muchos (¿cuántos son muchos?) podríamos forzar el concepto de continuidad.

En Economía se admite este postulado o hipótesis cuando, en el marginalismo, hablamos de la utilidad o productividad marginal, elasticidad...

¹⁷ Cournot A.-A.: pág. 72.

¹⁸ Aleksandrov, Tomo I, pág. 52.

Admitimos que existen las funciones de utilidad, producción, demanda, oferta... y que son continuas, lo que implica que un incremento infinitesimal de la cantidad disponible de un bien origina, a su vez, una variación infinitesimal de la utilidad, etc.

Este principio, a partir de 1959, resultará incompatible con los supuestos, estudios y descubrimientos de la «Nanociencia».

NANOLOGÍA

Hasta 1959 una idea estaba clara y sobre todo era metodológicamente aceptable: se podía admitir que si un bien se dividía indefinidamente, las partes conservaban las propiedades del todo.

Sin embargo a partir del año señalado se descubre que los cuerpos muy pequeños, a escala de nano, pierden propiedades macroscópicas y adquieren otras, que hacen que se pierda la naturaleza del bien primigenio. Este descubrimiento entrevé que el supuesto o la hipótesis de fina divisibilidad deje de ser admisible con todas las implicaciones y secuelas que pueda tener sobre la formalización de algunos conceptos económicos.

Sabemos que el prefijo *nano* proveniente del latín *nanus*, se traduce por enano y, en un sentido más amplio, por pequeño, diminuto.

Permítaseme que introduzca la idea de la Nanología. Desde una perspectiva etimológica, podríamos interpretar esta palabra (no admitida por la Real Academia de la Lengua) como el estudio de lo pequeño.

Por *nano*, en el campo científico, se entiende una dimensión de 10^{-9} , esto es, en términos de longitud, un nanómetro es la mil millonésima parte de un metro. En la bibliografía científica se utiliza la palabra nanotecnología para tratar y manipular materiales de escala atómica, desde las moléculas de ADN, a las de cobalto o carbono...

La nanociencia es, pues, la ciencia que se dedica a los objetos de tamaño comprendido entre décimas y centésimas de

nanómetros. La Nanología descubre un nuevo horizonte para la creación y comprensión de fenómenos y perspectivas con propiedades microscópicas que pueden servir para resolver problemas de distinta naturaleza y diferente etiología. Así se habla de nanomedicina, de nanofísica... La nanotécnica está descubriendo y creando partículas (nanopartículas) capaces de hacer más eficaz el consumo de carburante o mejores conductores...

La Nanología nos dice que, al tratar un bien a escala de *nano*, aparecen (y desaparecen) unas propiedades y características, que a escala macromolecular no tenía ese bien. En definitiva, surge un nuevo bien con unas características que no existían y que se mantienen cuando se utilizan a escala macroscópica.

Este comportamiento podría interpretarse como que aparece un nuevo bien o que el primero, el original, se muta en otro.

Si consideramos una manzana y la dividimos sucesivamente en partes cada vez más pequeñas, según el postulado de fina divisibilidad, cada uno de los nuevos trozos tendrá las propiedades, sabor, sales minerales, vitaminas..., que la manzana entera, esto es, las propiedades del todo. Este supuesto nos permite hablar de continuidad y de la utilidad marginal en términos de derivada de la función de utilidad.

En el mundo «nano» la naturaleza del elemento se pierde y aparece otro bien con propiedades diferentes de las que teníamos en nuestra manzana original.

En definitiva, a la luz de la Nanología es imposible la aceptación del postulado de fina divisibilidad, por lo que en la interpretación y aplicación de la continuidad, también surgirán problemas de orden metodológico.

Es evidente que cuando se aplica el concepto de continuidad o derivabilidad a un conjunto de funciones, se está forzando el concepto, pero es sólo eso, ampliar o generalizar la idea. Si tenemos una población suficientemente grande, numerosa, podemos hablar de tasa instantánea de natalidad o mortalidad; sin embargo, todos sabemos que en cada instante infinitamente pequeño no nace un niño.

Con la Nanología se pierde la idea de generalizar, ampliar o forzar un concepto, para decirnos que es imposible. Un nanogramo de manzana deja de ser un trozo de manzana con las propiedades que son propias de este fruto, para convertirse en otra cosa.

Estas líneas nos podrían hacer reflexionar hasta qué punto la continuidad y el postulado o hipótesis de fina divisibilidad se puede verdaderamente aplicar a la realidad, a pesar de su gran utilidad para la modelización de nuestro mundo, descubriendo y creando partículas (nanopartículas) capaces de modificar no sólo la concepción de la naturaleza sino de cambiar la técnica, haciéndola más eficaz como, por ejemplo, desde el aprovechamiento y consumo de carburantes hasta la creación de mejores conductores o medicinas personalizadas para cada paciente...

He comenzado esta intervención con un entrañable recuerdo para el maestro de muchos de los asistentes: el Profesor Vegas.

Finalizaré con unas palabras suyas y de Gabriel del Estal, que don Ángel pronunció con motivo de la Lección inaugural del curso académico de la Universidad Complutense en Madrid el año 1976:

«Fe es convicción. Convicción es seguridad de vencer. Convencer es compromiso de diálogo. Diálogo es inteligencia. Inteligencia es comprensión. Y comprensión es concordia.

Esta forma de pretender el diálogo como una exigencia de superación es también garantía de que la humanidad camina hacia su trascendental y esperanzador destino». En la búsqueda de la Verdad, me permito añadir.

Señor Presidente. Señores Académicos, muchas gracias.

BIBLIOGRAFÍA

- ALEKSANDROV y otros (1973): *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Tres tomos. Alianza Editorial, Madrid [López Rodríguez, M.].
- ANDRESKI, S. (1973): *Las ciencias sociales como forma de brujería*. Taurus, Madrid.
- BERLINSKI, D. (2006): *Ascenso infinito*. Debate, Barcelona.
- BLAUG, M. (1993): *Metodología de la economía o cómo explican los economistas*. Alianza Editorial, Madrid.
- BONDONE, C. (2007): *Equilibrio económico - Error teórico*. <http://www.carlosbondone.com/teoria-economica/aplicacion-opinion/.html>. Buenos Aires.
- BOSCH, R. (1998): *La concepción iterativa de conjunto y el empirismo*. Studia Philosophica. Universidad de Oviedo. Departamento de Filosofía.
- BOJOWALD, M. (2008): «Rebote del universo», *Investigación y ciencia*, diciembre de 2008, Barcelona.
- CAPANNA, P.: *El cero y la nada*, en <http://digital.el-esceptico.org/leer.php?id=192&autor=25&tema=26>
- CHERNI, A. (1990): *Física del tiempo*. Ed. Mir, Moscow.
- CHIANG, A. (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática*, McGraw-Hill, Madrid.
- COSTA, E. (1995): *Introducción de las expectativas en el análisis económico*, Civitas. Madrid.
- COSTA y otros (1999): *Ideología y matemáticas*, Actas reunión ASE-PUMA, Valencia.
- (2000): *Ideología y matemáticas: el tiempo en el análisis económico*, Actas reunión ASEPUMA, Sevilla.
- (2001): *Ideología y matemáticas: equilibrio y tiempo*, Actas reunión ASEPUMA, Las Palmas de Gran Canaria.
- (2005): *Ideología y matemáticas: el infinito*, Actas reunión ASE-PUMA, La Coruña.
- (2007): *Ideología y matemáticas: El cero, la nada y el conjunto vacío*, Actas reunión ASEPUMA, Palma de Mallorca.

- DAUBEN, J. W. (1995): «George Cantor», *Investigación y Ciencia*. Temas n.º 1, Barcelona.
- DELAHAYE, J. (2001): «El carácter paradójico del infinito», *Investigación y Ciencia*. Temas n.º 23, Barcelona.
- DENJOY A. (1965): «La inneidad del transfinito». Rec LE LIONNAIS, F. (1965): *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, EUDEBA [2.ª], Buenos Aires.
- FERRATER, J. (1990): *Diccionario de Filosofía*, Alianza Editorial, Madrid.
- GIBILISCO, S. (1991): *En busca del infinito*, McGraw-Hill, Madrid.
- GRIBBIN, J. (2005): *Historia de la ciencia, 1543-2001*, Ed. Crítica. Serie mayor.
- GODELIER, M. (1970): *Racionalidad e irracionalidad en economía*, Siglo XXI, Méjico.
- HARROD, R. (1979): *Dinámica económica*, Alianza Editorial, Madrid.
- KALDOR (1939): «A classificatory note on the determinants of equilibrium», *Review of Economic Studies*.
- IFRACH, G. (1987): *Las cifras*, Alianza Editorial, Madrid.
- KAPLAN, R. (2000): *The nothing is: anatural history of zero*, Oxford Univ. Press.
- LORENZO, J. (2001): «El infinito matemático», *Investigación y Ciencia*. Temas n.º 23, Barcelona.
- LÓPEZ CACHERO, M. (1995): *Algunos problemas de la adopción de decisiones*. Discurso de ingreso en la Real Academia de Doctores de Madrid.
- LÓPEZ MORENO, M.-J. (1996): *La economía de la empresa, encrucijada de sus fuentes*. Discurso de ingreso en la Real Academia de Doctores de Madrid.
- MARÍAS, J. (1999): *Credo y creatura*. Conferencia, Ed. Renato José Moraes.
- MBIT, J. (1991): *Entre Dios y el tiempo*, Mundo Negro. Madrid.
- ORTIZ, J. R. (1994): *El concepto de infinito*, Asociación Matemática Venezolana. Boletín Vol. I, n.º 2.

- PIENDA, A. DE LA (1998): *Utopía y visión del tiempo*. Studia Philosophica, Departamento de Filosofía, Universidad de Oviedo.
- PRIGOGINE, I. (1997): *El fin de las certidumbres*, Ed. Taurus, Madrid.
- RAVIER, A. O. (2006): «Aplicando el Market Based Management», *Revista RIIM*. Libertas, 45, en <http://www.eseade.edu.ar/riim/indice42.asp?ID=38>
- REY PASTOR, J. (1966): *Elementos de análisis algebraico*, 15.^a edición, Madrid.
- RIBAS, A. (1997): *Biografía del vacío. Su historia científica y filosófica desde la antigüedad hasta la Edad Moderna*, Destino, Barcelona.
- (1999): «En los límites de la realidad: El vacío», *Mundo Científico - La Recherche*, núm. 202. Ed. Fontalba, Barcelona.
- ROBINSON, J. (1966): *Filosofía económica*, Gredos, Madrid.
- ROBINSON, J. y EATWELL, J. (1976): *Introducción a la Economía Moderna*, Fondo de Cultura Económica [2.^a], Madrid.
- RUSSELL, B. (1967): *Los principios de la matemática*, Espasa Calpe, Madrid.
- SACRISTÁN, M. (1969): *Introducción a la lógica y al análisis formal*, Ariel, Barcelona.
- SAMUELSON (1948): *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge (Mass).
- (1971): *Fundamentos del análisis económico*, Ateneo, Buenos Aires.
- SOLAECHÉ, M. C. (1995): *La controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del infinito*, Divulgaciones matemáticas.
- SPENGLER, O. (1952): *La decadencia de Occidente*, Espasa-Calpe, Buenos Aires [Manuel García Morente].
- VEGAS, A. (1976): *El marco humano de la decisión empresarial*, Discurso de la solemne apertura de curso 1976-77. Universidad Complutense, Madrid.
- (1982): *La empresarialidad en la crisis de la cultura*. Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras, Barcelona.

- VELARDE, J. (1993): *Conocimiento y verdad*. Studia Philosophica, Universidad de Oviedo, Departamento de Filosofía.
- (2004): «Volver la mirada a Kant», *La Nueva España*, 1.º de febrero, Oviedo.
- WARUSFEL, A. (1968): *Los números y sus misterios*, Martínez Roca, Madrid.
- ZEUTHEN (1960): *Teoría y método en economía*, Aguilar, Madrid [Pedro Mayor Mayor].
- ZOHAR, D. (1990): *La conciencia cuántica*, Plaza y Janés. Madrid.

**CONTESTACIÓN
DEL
EXCMO. SR. DOCTOR DON MANUEL LÓPEZ CACHERO**

Excelentísimo Señor Presidente de la Real Academia de Doctores

Señores Académicos

Señoras y señores:

Conforme al honroso encargo recibido, que de corazón agradezco, cúmpleme responder en nombre de nuestra Corporación al discurso de ingreso en la misma del Doctor Emilio Costa Reparaz, elegido para portar la medalla número 47, anteriormente asignada a nuestro desaparecido colega Doctor Francisco Alemany Torres, que tan destacados servicios prestó a esta Institución y a quien en este momento dedico mi sentido recuerdo. Tuve la satisfacción, unido a nuestros compañeros y entrañables amigos Doctores Marcial Jesús López Moreno y Eugenio Prieto Pérez, con los que tantos años de actividad académica he compartido, de ser uno de los firmantes de la candidatura del Doctor Costa Reparaz para formar parte de esta Real Academia; esa satisfacción, como puede comprenderse, se ve hoy acrecentada, al producirse de manera efectiva su ingreso.

Conocí a nuestro nuevo colega hace más de cuarenta años, compartiendo con él en aquella época el adjetivo de «jóvenes», uno como destacado estudiante, el otro como incipiente profesor. He tenido la oportunidad de seguir su carrera académica, iniciada en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales (denominada entonces como de «Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales») de la que es hoy Universidad Complutense, extendida a otros Centros (tales como el Colegio Universitario San Pablo-CEU, el Real Colegio Universitario María Cristina e ICADE) y culminada como Catedrático de Matemáticas Empresariales, primero, y de Economía Finan-

ciera, después, en la Universidad de Oviedo, en la que continúa impartiendo su magisterio. Ha sido el Doctor Costa Reparaz Decano de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales y Director de Departamento en dicha Universidad, pero, sobre todo, es un Profesor íntegramente dedicado a su tarea, formador de alumnos y destacado impulsor de vocaciones docentes, culminadas en amplio número de casos con el acceso al claustro de discípulos suyos, hoy Catedráticos y Profesores Titulares de Universidad.

Y ha sido, y continúa siendo, un hombre de bien, que antepuso su manera de sentir y practicar su vocación académica en la Universidad de la que Clarín inmortalizó como Vetusta a cualquier otra posibilidad, que en sus manos tuvo, de desarrollar su actividad fuera de ese marco, incluso en dolorosas circunstancias personales, que no es hoy el momento de resaltar, pero que, estoy seguro de ello, pesan en su ánimo en estos instantes y en las que quienes tanto tiempo hace le conocemos encontramos nuevos motivos para admirar su comportamiento.

Se ha referido el Doctor Costa en su intervención a algunas de las cuestiones que, dándose por resueltas, son básicas en la construcción de la ciencia económica. No me detendré aquí en la añeja polémica mantenida por diversos no economistas (algunos estudiosos y otros no tanto) sobre si esta faceta del conocimiento humano constituye o no una ciencia; es éste un tema que algún día podríamos tratar en esta Corporación, si no encontrásemos otra tarea menos bizarra y más provechosa que atender. Mas, en todo caso, no considero inútil traer a colación la afirmación de J. A. Schumpeter en su monumental «Historia del Análisis Económico»¹ respecto a la pregunta: «¿es la economía una ciencia?». *La respuesta a la pregunta del rótulo depende, como es natural, de lo que entendamos por ciencia.* Obviamente, lo que subyace tras la cuestión es la posible comparación con aquélla que, tradicionalmente, ha sido considerada como la ciencia por antonomasia, la Física, y particularmente la Física matemática. Desde luego, desde este punto de vista la Economía, o al menos no «toda» la Economía, no podría ser calificada como ciencia. Pero si nos adentrásemos en un análisis sistemático de lo que conceptualmente

¹ J. A. Schumpeter: *Historia del Análisis Económico*.

es y significa la idea de ciencia, y sobre todo si nos detuviésemos en la concepción de la ciencia como «conocimiento instrumentado», llegaríamos a la conclusión de lo absurdo de negar al conocimiento de lo económico el carácter de científico. En todo caso debo insistir que no es éste el momento de debatir la cuestión, sin perjuicio de dejar constancia de la misma, asumiendo (al menos como hipótesis de trabajo) que, en efecto, de ciencia estamos hablando. Y en tal tesitura, sí quiero destacar la importancia de los problemas examinados por el nuevo Académico en el discurso que acaba de leer.

En efecto, la ciencia económica, conocida durante mucho tiempo como «Economía Política» y estudiada después con otras denominaciones, como «Teoría Económica» y «Análisis económico», ha venido utilizando métodos e instrumentos matemáticos desde hace largo tiempo. Hasta hace no demasiado insignes profesores universitarios dedicaron serios esfuerzos a participar en un peculiar debate referido a «Economía Matemática» *versus* «Economía no Matemática» o «Economía Literaria». No quedan ya vestigios de tal debate, probablemente porque la realidad ha impuesto la lógica implacable de evitar las discusiones bizantinas. Pero sí debe constatar que al abrazar la causa de la Matemática en la Economía, muchos de los ingresados en el club, quizá con el entusiasmo que produce la fe del converso, han tomado un sendero que se caracteriza por el uso instrumental de nociones y herramientas, si se me permite emplear este término, procedentes de la Matemática sin detenerse a criticar ni la necesidad ni el alcance de su empleo. Quizá un breve recorrido por la historia del pensamiento económico y el devenir histórico en el tratamiento de algunos temas esenciales de la ciencia económica podrá aportar alguna luz sobre lo que pretendo poner de manifiesto.

Se conviene en reconocer a Cournot² el carácter de progenitor de lo que desde entonces empezó a conocerse como «economía matemática»; sus *Principes mathématiques de la théorie des richesses*, publicada en 1838, «están considerados como el punto de partida de toda la teoría matemática de la economía»³. Es preciso puntualizar que el intento del autor francés

² A. Cournot: *Principes mathématiques de la théorie des Richesses* (publicada en 1838).

³ H. Denis: *Historia del pensamiento económico*.

venía precedido por algunos otros y muy singularmente por el de William Whewell⁴, como señala Schumpeter⁵, fue éste «*uno de esos individuos creadores de ambiente que pertenecen a la historia de la ciencia aunque no escriban una sola línea*», lo que, por otra parte, no es el caso. Poseyó Whewell, continúa Schumpeter: «*una punta de originalidad con un intento que ninguna cabeza trivial habría emprendido en su época... el de expresar matemáticamente unas cuantas proposiciones de la teoría económica de su tiempo*». Es cierto que el esfuerzo no había de ir «*más allá de una formulación simbólica de lo que ya había sido enunciado con palabras y, por tanto, no supone su obra un tratado de economía matemática, pues no produce razonamiento matemático*», pero representa, sin duda, un imprescindible antecedente de lo que a partir de Agustín Cournot sería ya un camino (no único, ciertamente, pero de difícil omisión) para el progreso del conocimiento instrumentalizado, esto es, de la ciencia, de lo económico.

Ese camino sería transitado con frecuencia creciente. Por él discurrirían Jevons, Walras, Pareto... por sólo citar algunos —pocos— nombres «sonoros» de los que han dejado huella en el pensamiento económico a lo largo de la Historia Contemporánea. Jevons⁶ afirmaría que la ciencia económica era «*una clase de matemáticas que calcula los efectos y las causas de la industria del hombre*»; Walras, quizá «*el mayor de los economistas*»⁷, había de desarrollar una teoría del equilibrio general, claramente inspirada en los principios newtonianos, que, asociada a su filosofía social, inspirada por la idea de la inexistencia del individualismo puro, pues el hombre vive en sociedad, haría de él un referente no sólo en la construcción de lo que posteriormente se llamaría «Teoría económica», sino en todo el complejo de la obtención de riqueza y su distribución, empleando para ello de manera permanente el método matemático de razonar y los instrumentos analíticos consecuentes;

⁴ W. Whewell: *A mathematical exposition of some doctrines of Political Economy* (publicada en 1829).

⁵ J. A. Schumpeter: *ob. cit.*

⁶ S. Jevons: *Theory of Political Economy* (publicada en 1871); pero en 1862 es cuando establece su prioridad respecto al *final degree of utility*, en el escrito *Notice of a General Mathematical Theory of Political Economy*, leído en la reunión de la «British Association for the Advancement of Science» en Cambridge.

⁷ Ben B. Seligman: *Principales corrientes de la ciencia económica moderna*.

Pareto⁸, en fin, con fiel seguimiento del método matemático, había de suceder en la Cátedra de Lausanne a Walras, aunque la evolución de su pensamiento y su propia concepción de la vida le alejase en sus creencias de aquél. La lista de «economistas matemáticos» se revela interminable, pero no sería concebible aludir a la cuestión sin mencionar los nombres de Irving Fisher⁹, auténtico adelantado (así le denominó Schumpeter¹⁰) en el campo de la Econometría, y de Ragnar Frisch, impulsor de la Econometric Society y creador de la revista «Econometrics», cuya influencia en el análisis y evolución del conocimiento económico desde el momento de su fundación no ha dejado de sentirse.

¿Quiere esto decir que existe una «escuela matemática» en el pensamiento económico, una suerte de doctrina como podrían ser la liberal, la neoclásica, la marxiana...? Nada más lejos de ello. Citando, una vez más, a Schumpeter¹¹: «...*los economistas matemáticos no constituyen escuela alguna en ningún sentido admisible de la expresión, del mismo modo que no forman escuela particular los economistas que saben italiano*». Lo único que en común poseen esos economistas es el uso de un método científico tan característico como el matemático, tanto para la elaboración de sus proposiciones como para la evidenciación del rigor de éstas; así, más que un «lenguaje simbólico», como durante algún tiempo se sostuvo, el empleo de la matemática por la ciencia económica se ha convertido —al menos en el dominio de la producción teórica— en algo esencial.

Pero, ¿cuál es el alcance real de esta afirmación? La respuesta a esta pregunta podemos hallarla a través de las que puedan facilitarse a otras dos: una, ¿en qué consiste la contribución que ha prestado la Matemática a la Economía?; otra, ¿puede también hablarse de una contribución de la Economía a la Matemática?

Comencemos por la primera. Ya se ha mencionado la posición de Cournot¹² sobre la imperiosa necesidad del empleo de la matemática en el razonamiento económico; sin el uso del

⁸ V. Pareto: *Cours d'Economie Politique* y *Manuel d'Economie Politique*.

⁹ I. Fisher: *Mathematical Investigations*.

¹⁰ J. A. Schumpeter: *Diez grandes economistas*.

¹¹ J. A. Schumpeter: *Historia del Análisis Económico*.

¹² A. Cournot: *ob. cit.*

llamado «cálculo diferencial» sería difícil concebir su valiosísima aportación al estudio de algunas formas del mercado y al proceso de formación de los precios, particularmente en los regímenes de monopolio, duopolio y oligopolio. No mucho después de la publicación de la obra de Cournot, en torno a 1860, Jevons formularía la noción de «utilidad marginal decreciente», insistiendo en el tema dos años más tarde en un trabajo enviado a la Asociación Británica para el Avance de las Ciencias¹³. Mas había de ser la obra de Carl Menger «Principles of Economics»¹⁴, publicada en 1871, la que, para la mayoría de los tratadistas, cambiaría el rumbo de la teoría económica, sirviendo su construcción como base para un nuevo enfoque. No es éste el lugar de juzgar la aportación del profesor austriaco desde el punto de vista ideológico; sin duda, no fueron sus preocupaciones por los problemas humanos y sociales —a diferencia, por ejemplo, de autores tan diferentes entre sí como Adam Smith o Karl Marx— las notas distintivas de su pensamiento. Pero es cierto que su formulación —no muy potente desde un punto de vista estrictamente matemático— de lo que habría de conocerse como «marginalismo» conduciría a una reconstrucción de los fundamentos teóricos de la ciencia económica; como afirma Seligman¹⁵, «*el marginalismo ofrecía amplias posibilidades para un nuevo tratamiento de todas las cuestiones, además del problema de la determinación del valor*». A partir de entonces se admitió que el problema del comportamiento económico podía ser descrito como un problema de optimización, fundamentalmente en el sentido de «máximo». Y así, teniendo en cuenta el supuesto de la «fina divisibilidad de los bienes», pudo comenzar a tratarse, con las proposiciones e instrumentos del análisis infinitesimal, la maximización de la utilidad, la de la producción, la determinación de los precios de equilibrio, la obtención del beneficio, la minimización de los costes... Con la ayuda del Análisis Matemático (y no sólo como valiosa herramienta de trabajo, sino conforme al cuidadoso empleo de sus nociones fundamentales) pudo encontrarse, a través de la conocida «ley de la igualdad de las utilidades marginales ponderadas», o «ley de Jevons-Menger-Walras», la solución del problema del «equili-

¹³ S. Jevons: *Brief Account of a General Mathematical Theory of Political Economy*.

¹⁴ Traducción de *Grundsätze der Volkswirtschaftslehre*.

¹⁵ Ben B. Seligman: *ob. cit.*

brio del consumidor», consistente, como es bien conocido, en determinar la manera óptima de distribuir por parte de un individuo sus disponibilidades monetarias entre el conjunto de bienes que desea consumir en un momento dado, conocido por él su propio sistema de preferencias y los precios a los que dichos bienes pueden adquirirse; igualmente pudo resolverse, utilizando análoga metodología, el problema del «equilibrio de la producción», que permite determinar la combinación óptima de los factores de la producción para conseguir la máxima cantidad de producto, de acuerdo con las leyes de la técnica y conocidos los precios de dichos factores y el coste dispuesto a ser atendido por la unidad económica, o dicha combinación para lograr alcanzar una cantidad de producto dada con el menor coste. En estos casos, el recurso a la teoría matemática de la optimización y en particular al método de los multiplicadores de Lagrange facilita la mejor solución a las cuestiones suscitadas. Debo insistir, llegados a este punto, que el uso de la matemática va aquí mucho más allá que el mero recurso a la «herramienta», puesto que es la «lógica» del razonamiento económico (pretender maximizar satisfacciones o niveles de producción, o minimizar costes) lo que genera la «necesidad» de buscar, desde el punto de vista matemático, funciones que, según los casos, cumplan condiciones de concavidad o convexidad que permitan revestir del carácter de «suficientes» a las «de primer orden» o «necesarias» de la optimización lagrangiana.

Llegados a este punto, debo reiterar lo que en líneas arriba ya he señalado: no se trata aquí de «juzgar», ni tan siquiera «criticar», los supuestos ideológicos o los juicios de valor, fueren explícitos o tácitos, subyacentes en la que con propiedad se conoce como «escuela marginalista»; porque lo que la Historia del Pensamiento Económico, y la de la Economía en general analizan, son las características y consecuencias de las posiciones teóricas de los economistas (o de la política económica aplicada en cada período), en tanto que la pretensión que aquí se persigue es la de destacar la aportación de una ciencia (la Matemática o la Economía) a otra (la Economía o la Matemática). En coherencia con este planteamiento, procede destacar la postura de León Walras, claramente influido por Cournot, cuyos «Principes...»¹⁶ introdujeron a Walras en el enfoque matemático,

¹⁶ A. Cournot: *ob. cit.*

bien cierto es que con soltura, brillantez y rigor mayores que los de aquél; debe destacarse que desde su incorporación, en 1871 a la Cátedra de Economía Política de Lausanne, donde había de permanecer hasta 1892, al igual que en su posterior dedicación a cuestiones prácticas (puesta de manifiesto en dos colecciones de ensayos, publicados, respectivamente, en 1896 y 1898)¹⁷, su concepción de «lo económico» se caracterizó por la inquietud que le suscitaba lo que ya entonces se conocía como «la cuestión social» (aunque no consiguiese reconciliar las leyes científicas de la economía con los principios básicos de la ética y la justicia social), inquietud presente en su propósito de elaborar una «teoría pura», para la que el rigor de la matemática le parecía imprescindible (sin el recurso a esta ciencia le hubiera resultado imposible probar que el valor era función creciente de la utilidad y decreciente de la cantidad, al tiempo que su formulación de una «teoría del equilibrio general» exigía formular un sistema de ecuaciones simultáneas).

La aplicación de los principios matemáticos a la construcción de la ciencia económica no se agota con el tratamiento de las cuestiones antes mencionadas mediante el empleo de nociones básicas del cálculo diferencial. El análisis económico se desarrolló durante un largo período de la historia prescindiendo del hecho notable de que los sucesos de carácter económico acaecían en momentos concretos y que su evolución, y con ella la del conocimiento científico que pretendía ofrecer explicación de lo acaecido y proporcionar respuestas a los interrogantes del futuro, exigía introducir el tiempo como un elemento más del problema; pero la incorporación del tiempo a las proposiciones científicas de la Economía no habría sido posible sin nuevas aportaciones de la Matemática. Así, la conocida como «estática comparativa» había de posibilitar la comparación entre dos situaciones diferentes en el tiempo, sin que éste fuese considerado como factor explicativo de tales situaciones (es decir, el tiempo jugaría aquí el papel de «parámetro», cuya concreción se llevaría a cabo de manera exógena); sin el recurso a las funciones en forma implícita y a las compuestas no se podría haber desarrollado este método. Y sin el concurso de las «ecuaciones funcionales», y de manera particular las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias finitas,

¹⁷ L. Walras: *Études d'Économie Sociales y Études d'Économie Politique Appliquée*.

habría sido inviable introducir al tiempo como una variable más, es decir, habría sido imposible el intento de elaborar una «Economía dinámica», entendiendo, con Frisch¹⁸ y Samuelson¹⁹, que «*un sistema es dinámico si su comportamiento en el tiempo se encuentra determinado por ecuaciones funcionales en las cuales están contenidas, de una forma esencial, variables en diferentes instantes temporales*»; así, a título de ejemplo, los modelos propuestos por Solow²⁰, Bergstrom²¹, Goodwin²², Uzawa²³, Kalecki²⁴, entre otros, han facilitado explicaciones sobre el proceso de crecimiento y otras cuestiones donde la variable tiempo juega un papel fundamental (una vez más, no se trata aquí de discutir la oportunidad, la vigencia o el acierto de tales modelos, sino de resaltar el uso de la Matemática en su génesis y desarrollo).

Anteriormente aludí a la posible aportación de la ciencia económica a la Matemática. Quiero dejar constancia de que me refiero a tal aportación especialmente en el sentido de desempeñar el conocimiento económico, o, por mejor decir, la necesidad por parte de éste, el papel de incitador o impulsor de unos determinados desarrollos de la Matemática. Me refiero expresamente, en una primera aproximación, a lo que algunos autores (tales como Dorfman, Samuelson y Solow²⁵) han llamado, quizá, a mi entender, exageradamente, «economía lineal», que vendría constituida, por orden cronológico del nacimiento de sus componentes, por la teoría de los juegos, el análisis *input-output* y la programación lineal.

El matemático, joven matemático entonces (tenía veinticinco años), John von Neumann presentó un trabajo en 1928 sobre la teoría de los juegos en la Sociedad Matemática de Göttingen²⁶, sobre un tema al que ya habían aludido anterior-

¹⁸ R. Frisch: *Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics*.

¹⁹ P. A. Samuelson: *The Stability of Equilibrium Comparative Statics and Dynamics*.

²⁰ R. M. Solow: *A Contribution to the Theory of Economic Growth*.

²¹ A. R. Bergstrom: *The Construction and Use of Economic Models*.

²² R. M. Goodwin: *A Model of Cyclical Growth*.

²³ H. Uzawa: *On a Two-Sector Model of Economic Growth*.

²⁴ M. Kalecki: *Theory of Economic Dynamics*.

²⁵ R. Dorfman; P. A. Samuelson, R. M. Solow: *Programación lineal y análisis económico*.

²⁶ J. von Neumann: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*.

mente Daniel Bernoulli en el siglo XVIII y Émile Borel en 1920; ese trabajo anunciaba ya el teorema central de la teoría, pero habría que esperar la aparición de la obra fundamental de Von Neumann, escrita en colaboración con el economista Oskar Morgenstern²⁷, para que pudiera hablarse con propiedad de la aparición de una nueva rama en el árbol de la ciencia económica susceptible de soportar el análisis de las situaciones de conflicto; esa rama permitiría, además, el desarrollo de una nueva concepción de la utilidad, posibilitadora de una medida de ésta más allá de lo que anteriormente había pretendido el marginalismo. No mucho después otros autores, tales como Rapoport²⁸ (en 1960) y Luce y Raiffa²⁹ (en 1957), habían de insistir en estas cuestiones con notables aportaciones sobre las ideas de conflicto y de utilidad, y Nash³⁰ (en 1950), sobre todo llevaría a cabo una formulación de la teoría de juegos que ha alcanzado un importante desarrollo como instrumento de análisis económico.

En 1936 W. Leontief³¹, inspirándose en el «Tableau Économique» de François Quesnay, había de iniciar el llamado análisis *input-output*, orientado a producir el tratamiento empírico de un sistema de equilibrio general, con la insoslayable contribución del álgebra matricial. La construcción de las conocidas como «tablas *input-output*» ha suministrado, y continúa haciéndolo, un difundido método de análisis de las interrelaciones entre los sectores económicos.

Por fin, la Programación Lineal ha permitido tratar los problemas de optimización matemática referidos a funciones lineales sometidas a restricciones también lineales. Su primer antecedente se encuentra en la investigación realizada de ciertas propiedades del sistema walrasiano por Hans Neisser y Heinrich von Stackelberg; después, en 1939, el matemático soviético Kantorovich trató temas similares a los que, de manera

²⁷ J. von Neumann, O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*.

²⁸ A. Rapoport: *Fights, Games and Debates*.

²⁹ R. D. Luce, H. Raiffa: *Games and Decisions*.

³⁰ J. Nash: *Equilibrium Pareto in n-Person Games*.

³¹ W. Leontief: *The Structure of American Economy, 1919-1929* (publicada en 1941) y *Quantitative Input and Output Relations in the Economic Systems of the United States* (artículo publicado en 1936).

ya más completa, había de desarrollar, a partir de 1947, George B. Dantzig³².

Si aún cupiese alguna duda respecto a la interrelación entre la Economía y la Matemática, fácilmente podría resolverse sin más que advertir el auge adquirido por la Econometría. En efecto, sentida la necesidad de avanzar más allá de lo puramente cualitativo en el análisis de los fenómenos económicos, constatadas las aportaciones de economistas tan significados y representativos como los ya citados Cournot, Jevons, Menger, etc., la ciencia económica ha ido adoptando de manera creciente los modos de lo empírico y las formas de lo matemático (esto entendido en un sentido amplio, con el fin de incluir en la expresión las formulaciones estocásticas), de manera que las proposiciones formuladas y las conclusiones producidas poseyeran una fundamentación cuantitativa. Cabe aquí recordar la afirmación de Alfred Marshall dirigiéndose a los estudiantes de Cambridge a través de las páginas del «*Quarterly Journal of Economics*» en 1897: «*Hablando en términos generales, el siglo XIX ha completado en gran parte el análisis cualitativo de la economía; pero no ha proseguido más allá. Ha sentido la necesidad de un análisis cuantitativo y ha realizado algunas investigaciones particulares sobre la manera de desarrollarlo, pero su perfeccionamiento es una tarea que os corresponde a vosotros*»³³. Los hechos vinieron a dar la razón al Profesor de Cambridge, y la mejor prueba de ello se halla en el nacimiento, auge y desarrollo de la Econometría. No existe un acuerdo global respecto al momento en que ésta surge, pues las posiciones al respecto varían según el criterio que se emplee; pero de lo que no existe duda es que ya en 1912 se pensaba en la necesidad de dar forma a un nuevo cuerpo de conocimiento científico que, de manera sistemática, aunase lo que la teoría económica elaboraba con la ayuda del método matemático (y la de sus instrumentos) y con la de la teoría de la probabilidad y la inferencia estadística; a ello respondía la creación de un grupo de trabajo encabezado por Irving Fisher. Estas ideas tomarían forma con la creación en 1930 de la Econometric Society y la publicación por ésta de la revista

³² C. B. Dantzig: *Maximization of a Linear of Variables Subjet to Linear Inequalities*.

³³ A. Marshall: «The old generation of economists and the new» (publicado en *Quarterly Journal of Economics*, 1897).

Econometrics, bajo el impulso de Roos, Fisher y Frisch. Desde entonces resulta difícilmente concebible pensar en llevar a cabo formulaciones en el dominio de la ciencia económica que no se apoyen en un modelo econométrico. Creo que es de justicia dejar aquí constancia de que, a pesar de las singulares circunstancias que en la época de los años treinta se dieron en nuestro país, ya al crearse la entonces denominada «Facultad de Ciencias Políticas y Económicas» en la que en aquel momento era la Universidad de Madrid, incluyeron sus planes de estudios la nueva disciplina científica, inicialmente a cargo del Profesor don José Castañeda, conocido no sólo por su labor como Catedrático de Teoría Económica (y autor de un importante libro³⁴ sobre tal materia), sino también por el que para muchos economistas españoles fue el más importante estudio econométrico de aquellos años³⁵ realizado en nuestro país; después, los fallecidos profesores Ángel Alcalde Inchausti y Alfonso García Barbancho habían de abrir camino al ganar las primeras cátedras universitarias de la disciplina en Madrid y Barcelona, respectivamente.

Es, a mi parecer, éste el contexto en el que debemos considerar lo que acaba de exponer el Doctor Costa Reparaz. Su preocupación por el rigor y por el alcance de los conceptos matemáticos no sólo no es ajena a lo que la ciencia económica estudia, sino que debe verse inscrito dentro del más estricto planteamiento de una ciencia que, sin dejar de pertenecer a las que Dilthey llamó «de la realidad interior», se aproxima en sus formas cada vez más a las que el propio autor denominó «de la realidad exterior».

Doy, en nombre de la Real Academia de Doctores de España, la bienvenida a nuestro nuevo compañero, el Académico Numerario Doctor Emilio Costa Reparaz.

³⁴ J. Castañeda: *Lecciones de Teoría Económica*.

³⁵ J. Castañeda: *El consumo de tabaco en España y sus factores* (publicado en 1945).